2 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst eine wichtige Anwendung vom Isomorphiesatz ableiten; in Korollar 2.1 werden die Ideale von einem Faktorring charakterisieren. Dann werden wir verschiedene allgemeine Idealkonstruktionen einführen (beziehungsweise in Erinnerung bringen). Wir werden bei der Gelegenheit das Lemma von Zorn kennenlernen.

Notation:
$x + I$ wird in dieser Vorlesung auch als $\overline{x}$ geschrieben .

Korollar 2.1.
Sei R ein kommutativer Ring und $I \triangleleft R$. Sei $\mathcal{T} := \{A \subseteq R\,; I \subseteq A \subseteq R\}$ die Menge der Teilringe von R die I enthalten und $\mathcal{T}_I$ die Menge der Teilringe von R/I. Es gelten für $A \in \mathcal{T}$:

1. $I \triangleleft A$,
2. Die Abbildung
$$A \mapsto A/I$$
ist eine bijektive, Inklusionserhaltende Korrespondenz zwischen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$,
3. $A \triangleleft R$ genau dann, wenn $A/I \triangleleft R/I$.

Beweis:
Siehe Übungsblatt. □

Definition 2.2.
Sei $A \subseteq R$ eine beliebige Teilmenge. Das *von A erzeugte Ideal*, mit $< A >$ bezeichnet, ist das kleinste Ideal, das A enthält.

Die folgende Aussage ist als ÜA zu prüfen:

Bemerkung 2.3.

1. $< \emptyset >= \{0\}$.
2. $< A >= \bigcap_{\{A \subseteq J \triangleleft R\}} J$ (der Durchschnitt aller Ideale, die A enthalten).
3. $< A >= \{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i\,;\, n \in \mathbb{N}\,,\, r_i \in R\,,\, a_i \in A\}$
(die Menge aller endlichen R-Linearkombinationen aus Elementen von A).

Konvention: Wenn $A = \{a_1, \ldots, a_l\}$ endlich ist, so schreiben wir einfach $< a_1, \ldots, a_l >$.

Definition 2.4.
Sei $a \in R$, $< a >= \{ra; r \in R\}$ heißt *Hauptideal*, das von a erzeugt ist.

Beispiel 2.5.
$< 1 >= R$ und $< 0 >= \{0\}$.

Proposition 2.6.
Seien R ein kommutativer Ring mit 1, und $I \triangleleft R$. Es gelten:

(1) $I = R$ genau dann, wenn $I \cap R^\times \neq \varnothing$

(2) R ist ein Körper genau dann, wenn die einzigen Ideal R und $\{0\}$ sind.

Beweis:

(1) "⇒" trivial

"⇐" $u \in I$ Einheit $\Rightarrow$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \in R}}{u^{-1}} u \in I \Rightarrow 1 \in I$

$\Rightarrow r.1 \in I \ \forall \ r \in R$

(2) "⇒" Sei $I \neq \{0\}$ und $u \in I; u \neq 0$. Dann ist u eine Einheit und somit $I = R$.

"⇐" Sei $x \in R, x \neq 0$. Dann ist $< x >= R$, d.h. $1 \in < x >$, also existiert ein $r \in R$ mit $rx = 1$, also $r = x^{-1}$ □

Korollar 2.7.
Sei R ein Körper, S ein Ring und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Ist $\varphi \neq 0$, dann ist φ injektiv.

Beweis:
Proposition 1.11(2) liefert dass $\ker \varphi \triangleleft R$. Da $\ker \varphi \neq R$ ist, folgt aus Proposition 2.6 dass $\ker \varphi = \{0\}$. Also ist φ injektiv (Bemerkung 1.7). □

Definition 2.8.
$M \triangleleft R$ ist *maximal*, wenn

(i) $M \neq R$ (M ist echt).

(ii) Ist $I \triangleleft R$ mit $M \subseteq I \subseteq R$,

dann gilt: $I = M$ oder $I = R$ (i.e. es gibt keine weiteren Ideale strikt zwischen M und R).

Proposition 2.9.
Jedes echte Ideal ist in einem Maximalideal enthalten.

Um Proposition 2.9 zu beweisen, brauchen wir Zorn's Lemma.

Exkurs

Partielle Ordnung

Sei $A \neq \varnothing$ eine Menge. Eine *partielle Ordnung* auf A ist eine Relation $\leq$ auf A mit den Eigenschaften:

(1) $x \leq x$ für alle $x \in A$.

(2) Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$ für alle $x, y \in A$.

(3) Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$ für alle $x, y, z, \in A$.

(4) $\leq$ ist *total* falls $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in A$.

Definition

(i) Sei $(A, \leq)$ eine partielle Ordnung und $B \subseteq A$. Ein Element $a \in A$ heißt *obere Schranke* für B in A, falls $b \leq a$ für alle $b \in B$.

(ii) $m \in A$ heißt *maximal*, wenn gilt: $m \leq x \Rightarrow m = x$ für alle $x \in A$.

Zorn's Lemma

Sei $A \neq \varnothing$ eine partielle Ordnung mit der Eigenschaft: Jede total angeordnete Teilmenge $B \subseteq A$ hat eine obere Schranke in A. Dann hat A ein maximales Element.

Ende Exkurs.

Beweis von Proposition 2.9:

Sei $I \triangleleft R$, $I \subsetneq R$. Betrachte

$S :=$ die Menge aller echten Ideale von R, die I enthalten.

$I \in S$, so $S \neq \varnothing$.

S ist partiell geordnet durch Mengeninklusion. Wir behaupten, dass jede total geordnete Teilmenge von S eine obere Schranke in S hat. Sei also $\xi \subseteq S$ eine solche. Setze

$$J := \bigcup_{c \in \xi} C$$

J ist Ideal: $0 \in J$. Seien $a, b \in J$, existieren $C_1, C_2 \in \xi$ mit $a \in C_1$ und $b \in C_2$.

Nun gilt $C_1 \subseteq C_2$ oder $C_2 \subseteq C_1$ (weil ξ total geordnet ist).

In jedem Fall ist $a + b \in J$ (weil $a + b \in C_1$ oder $a + b \in C_2$).

Analog zeigt man: $a \in J$ und $r \in R \Rightarrow ra \in J$.

Nun zeigen wir: $J \subsetneq R$, sonst $1 \in J$, also $1 \in C$ für ein geeignetes $C \in \xi$ - Widerspruch, weil $C \in \xi$ echt sein muss.

Anwendung von Zorn's Lemma ergibt:

S hat maximale Elmente. Wenn M ein solches ist, dann ist klar, dass M ein maximales Ideal ist, welches I enthält, wie behauptet. $\square$