3 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir Primideale und Maximalideale näher untersuchen. Danach werden wir Produktringe einführen. In diesem Zusammenhang werden wir den Chinesischer Reste-Satz aussagen und beweisen. Damit wird § 2 beendet. In § 3 führen wir Bruchringe ein.

Proposition 3.1.
$M \lhd R$ ist maximal genau dann, wenn R/M ein Körper ist.

Beweis:
M ist maximal, genau dann, wenn $M \subsetneq R$ und es keine Ideale A gibt mit

$$M \subsetneq A \subsetneq R$$

d.h. genau dann, wenn R/M nur $M/M = \{0\}$ und R/M als Ideale hat. Nun Proposition 2.6(2) anwenden. $\square$

Beispiel 3.2.
$n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ ist maximal genau dann, wenn $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ ein Körper ist, genau dann, wenn $n = p$ eine Primzahl ist (Lineare Algebra I, 3. Vorlesung).

Definition 3.3.
$P \lhd R$ ist ein Primideal, wenn

(1) P echt ist, i.e. $P \subsetneq R$.
(2) Für alle $a, b, \in R$: Aus $ab \in P$ folgt $a \in P$ oder $b \in P$.

Beispiel 3.4.
$\{0\} \neq p\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ ist Primideal genau dann, wenn p eine Primzahl ist.

Proposition 3.5.
$P \lhd R$ ist Primideal genau dann, wenn R/P ein Integritätsbereich ist.

Beweis:
Per Definition von R/P gilt für $a, b \in R : \overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$, und $\overline{a} = \overline{0}$ genau dann, wenn $a \in P$. Dies bedeutet wiederum: P Primideal genau dann, wenn $[\overline{ab} = \overline{a}\overline{b} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$ **oder** $\overline{b} = \overline{0}]$ genau dann, wenn R/P integer ist. $\square$

Aus Proposition 3.1 und 3.5 folgt nun:

Korollar 3.6.
Jedes maximale Ideal ist Primideal.

Definition 3.7.

(1) Seien R, S Ringe. Wir definieren Ringoperationen auf $R \times S$ (koordinatenweise).

$$\left.\begin{array}{lclcl}(r_1,s_1) & + & (r_2,s_2) & := & (r_1+r_2, s_1+s_2)\\ (r_1,s_1) & \times & (r_2,s_2) & := & (r_1r_2, s_1s_2)\end{array}\right\}\text{ für alle } r_1,r_2 \in R \text{ und } s_1,s_2 \in S$$

$R \times S$ heißt *Ringprodukt.*

(2) Seien $A, B \lhd R$, setze: $A+B := \{a+b; a \in A, b \in B\}$. A, B sind *teilerfremd*, wenn $A+B = R$

Konvention: In der Bezeichnung $\overline{x}$ für ein Element aus R/I, werden wir zur Erleichterung der Notation das Symbol $^-$ unterbinden, wann immer der Kontext klar ist.

Satz 3.8. (Chinesischer Reste-Satz)
Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und $A_1, \dots, A_k \lhd R$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & R & \to & \prod_{i=1}^k (R/A_i)\\ & r & \mapsto & (r+A_1, \dots, r+A_k)\end{array}$$

ist ein Ringhomomorphismus mit $\ker\varphi = \bigcap_{i=1}^k A_i$.

Wenn A_i, A_j teilerfremd sind für alle $i \neq j$, dann ist φ surjektiv. In diesem Fall gilt also:

$$R/\bigcap_{i=1}^k A_i \simeq \prod_{i=1}^k (R/A_i).$$

Beweis:

Ohne Einschränkung $k = 2$ (ÜA). Prüfe, für $r_1, r_2 \in R$ ob $\varphi(r_1+r_2) \stackrel{?}{=} \varphi(r_1)+\varphi(r_2)$. Wir berechnen:

$$\begin{array}{rcl}\varphi(r_1+r_2) & = & ((r_1+r_2)+A_1, (r_1+r_2)+A_2)\\ & = & ((r_1+A_1)+(r_2+A_1), (r_1+A_2)+(r_2+A_2))\\ & = & (r_1+A_1, r_1+A_2)+(r_2+A_1, r_2+A_2)\\ & = & \varphi(r_1)+\varphi(r_2)\,.\end{array}$$

Analog berechnet man $\varphi(r_1r_2)$ (ÜA). Also ist φ ein Ringhomomorphismus. Wir berechnen:

$$\begin{array}{rcl}\ker\varphi & = & \{r \in R\,;\ \varphi(r) = 0\}\\ & = & \{r \in R\,;\ \varphi(r) = (A_1, A_2)\}\\ & = & \{r \in R\,;\ r \in A_1 \text{ und } r \in A_2\}.\end{array}$$

Sei nun $A_1 + A_2 = R$. Es existieren also $x \in A_1$ und $y \in A_2$ mit $x + y = 1$.
Es folgt: $x - 1 \in A_2$ und $y - 1 \in A_1$, und somit $\varphi(x) = (0,1)$ und $\varphi(y) = (1,0)$.

Sei nun $(r_1 + A_1, r_2 + A_2) \in R/A_1 \times R/A_2$ beliebig. Setze $r := r_2x + r_1y$ und berechne:

$$\begin{array}{rcl}\varphi(r) & = & \varphi(r_2x+r_1y)\\ & = & \varphi(r_2)\varphi(x)+\varphi(r_1)\varphi(y)\\ & = & (r_2+A_1, r_2+A_2)(0,1)+(r_1+A_1, r_1+A_2)(1,0)\\ & = & (0, r_2+A_2)+(r_1+A_1, 0)\\ & = & (r_1+A_1, r_2+A_2).\end{array}$$

Also ist φ surjektiv.
Die letzte Aussage folgt aus Isomorphiesatz. □

§ 3 Bruchringe

Definition 3.9.
Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und $D \subseteq R$. D ist multiplikativ, falls $1 \in D$ und $st \in D$ für alle $s, t \in D$.

Beispiel 3.10.

(i) $D = R^\times$

(ii) $D = R \backslash P$ mit $P \triangleleft R$ Prim.

Konstruktion:
Sei $D \subset R$ eine multiplikative Untermenge, ohne Nullteiler, und so dass $0 \notin D$. (*)

Definiere eine Relation $\sim$ auf $R \times D$:

$$(r, d) \sim (r', d') \Leftrightarrow rd' = dr' .$$

$\sim$ ist Äquivalenzrelation, wir zeigen z.B. die Transitivität:

$$\left.\begin{array}{rccc} & (r,d) & \sim & (s,e) \\ \text{und} & (s,e) & \sim & (t,f) \end{array}\right| \Rightarrow + \left.\begin{array}{ccccc} re & - & sd & = & 0 \\ sf & - & te & = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} \times f \\ \times d \end{array} \text{ ergibt } (rf - td)e = 0,$$

Außerdem ist e ist kein Nullteiler und $e \neq 0$. Also muss $rf - td = 0$ sein und damit $rf = td$. Also $(r, d) \sim (t, f)$.

Notation:
Schreibe $\frac{r}{d} := [(r, d)]$ (die Äquivalenzklasse von (r, d)) und setze $D^{-1}R :=$ die Menge der Äquivalenzklassen.

Wir Versehen $D^{-1}R$ mit den folgenden Verknüpfungen:

$$\frac{r_1}{d_1} + \frac{r_2}{d_2} := \frac{r_1 d_2 + r_2 d_1}{d_1 d_2} \quad \text{und} \quad \frac{r_1}{d_1} \cdot \frac{r_2}{d_2} := \frac{r_1 r_2}{d_1 d_2}.$$

Im Skript 4 werden wir zeigen dass $D^{-1}R$ ein Ring ist, und werden seine Eigenschaften weiter untersuchen.