4 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript beweisen wir (wie angekündigt am Ende vom Skript 3) Satz 4.2, und liefern wichtige Beispiele. Im Abschnitt 4 untersuchen wir Polynomringe über Ringe; siehe Satz 4.8. Wir beenden mit dem wichtigem Besipiel 4.11.

Definition 4.1. Ein injektiver Ringhomomorphismus heißt eine *Einbettung*.

Ansatz:
R kommutativer Ring mit 1, $D \subset R$ multiplikative Untermenge ohne Nullteiler, $0 \notin D$. (*)

Satz 4.2.
$D^{-1}R$ ist ein kommutativer Ring mit Eins. Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} i: & R & \to & D^{-1}R \\ & r & \mapsto & \frac{r}{1} \end{array}$$

definiert eine Einbettung mit $i(D) \subseteq (D^{-1}R)^{\times}$.

Beweis:
Wir zeigen, dass die Addition wohldefiniert ist.

Seien also $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, und $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$. Wir müssen zeigen dass: $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$.

Wir prüfen:

$$\begin{array}{ccc} \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} & \text{und} & \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ ab' = a'b & & cd' = c'd \\ (ad+bc)(b'd') & \overset{?}{=} & (a'd'+b'c')(bd) \\ \text{berechne} & & \text{und vergleiche} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \underline{ab'}dd' + \underline{\underline{cd'}}bb' & = & \underline{a'b}dd' + \underline{\underline{c'd}}bb' \end{array}$$

Also gilt die Gleichung.

Analog zeigen Sie dass die Multiplikation wohldefiniert ist, dass die Ringaxiome für $D^{-1}R$ gelten, das Nullelement $\frac{0}{1}$ und Einselement $\frac{1}{1}$ sind (ÜA).

Prüfen Sie dass die Abbildung i ein Ringhomomorphismus ist (ÜA). Per Definition von i gilt: $i(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{r}{1} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow r = 0$. Also ist i injektiv.

Für $d \in D$ ist $i(d) = \frac{d}{1}$ und damit $i(d)^{-1} = \frac{1}{d}$. $\square$

Konvention: Wir identifizieren R mit $i(R)$ (i.e. r mit $\frac{r}{1}$ für alle $r \in R$). Somit wird R mit dem Teilring $i(R)$ von $D^{-1}R$ identifiziert.

Definition 4.3.
$D^{-1}R$ ist der *Ring von Brüchen von R bezüglich D.*

Satz 4.4.
Jeder Integritätsbereich lässt sich in einen Körper einbetten.

Beweis:
Wenn R integer ist, dann erfüllt $D = R\backslash\{0\}$ die Bedingung $(*)$. Dann ist $D^{-1}R$ ein Körper (wenn $0 \neq \frac{r}{d}$ dann ist $r \neq 0$ und $(\frac{r}{d})^{-1} = \frac{d}{r}$). □

Notation: Wenn R integer ist und $D = R\backslash\{0\}$ bezeichnen wir den Körper $D^{-1}R$ mit **Quot (R)**.

Korollar 4.5.
Der Ring R läßt sich in einen Körper einbetten genau dann, wenn er integer ist.

Beispiel 4.6.
Quot $(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

Definition 4.7.
P ist ein Primideal; $D = R \setminus P$.
$R_P := D^{-1}R$ bezeichnet die *Lokalisierung von R nach P.*

§ 4 Polynomringe über Ringe

Erinnerung:
• $R[x] := \{p(x)\ ;\ p(x) \text{ Polynom über } R\}$

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a, x + a_0$

$$n \in \mathbb{N}_0 \left[\begin{array}{lll} 0 \neq a_n & := & \text{Leitkoeffizient} \\ \deg p & := & n \end{array} \right.$$

• $R \subseteq R[x]$ als Teilring der konstanten Polynome (i.e. Polynome p mit $\deg p = 0$).
• Addition: Koordinatenweise (koeffizientenweise)
• Multiplikation: wenn $p(x) = \sum a_i x^i$ und $q(x) = \sum b_j x^j$,
so ist der Koeffizient von x^k im Produkt $p(x)q(x)$ gleich $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.
• Wir beantworten nun die Frage: Wann ist $a_n b_m$ Leitkoeffizient vom Produkt $p(x)q(x)$?
Siehe dazu den Beweis vom Satz 4.8.

Satz 4.8.
R ist integer genau dann, wenn $R[x]$ integer ist.

Beweis
"$\Leftarrow$" Ein Teilring von einem Integritätsbereich ist integer.

"$\Rightarrow$" Sei $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ für $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_o$ und $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_o$, dann ist $a_n b_m \neq 0$, weil R integer ist (und damit ist auch $\deg p(x)q(x) = n + m$). Insbesondere ist $p(x)q(x)$ nicht das Nullpolynom. □

Definition 4.9.
Sei K ein Körper. Dann ist Quot $(K[x]) \coloneqq K(x)$ der *rationale Funtkionenkörper einer Variablen über K.*

Bemerkung 4.10.
Sei R ein Ring. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{llcll} ev_0 : & R[x] & \twoheadrightarrow & R & \\ & p(x) & \mapsto & p(0) & = \text{ der konstante Term von } p(x). \end{array}$$

Dann ist ev_0 ein surjektiver Ringhomomorphismus (ÜA). Wir berechnen:

$$\ker ev_0 =< x >= \{xf(x); f(x) \in R[x]\}$$

(das Ideal der Polynome mit konstantem Term gleich Null).

Es folgt aus Isomorphiesatz dass $R[x]/ < x > \simeq R$.

Beispiel 4.11. Sei nun $R = \mathbb{Z}$, so ist $\mathbb{Z}[x]/ < x > \simeq \mathbb{Z}$.

Wir sehen also (siehe Proposition 3.1 und 3.5): $< x >$ ist ein Primideal in $\mathbb{Z}[x]$, aber ist nicht maximal.