11 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst wichtige Begriffe (Zerfällungskörper, normale Erweiterung, Kompositum) einführen und untersuchen. In Abschnitt 13 werden wir die Voraussetzungen erstellen, um dann algebraische Abschlüsse in Skript 12 aufzubauen.

Sei K/F stets eine Körpererweiterung.

Korollar 11.1.
Seien $\alpha, 0 \neq \beta \in K$ algebraisch über F, dann sind $\alpha \pm \beta\,, \alpha\beta\,, \alpha/\beta$ auch algebraisch über F.

Beweis:
Die Erweiterung $F(\alpha,\beta)/F$ ist endlich wegen Satz 10.13. Nun sind $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in F(\alpha,\beta)$. Aus Korollar 10.10 folgt nun unsere Behauptung. □

Korollar 11.2.
Die Menge $\tilde{F} := \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ alg } /F\}$ ist ein Teilkörper von K welcher F enthält.

Definition 11.3.
Dieser Teilkörper $\tilde{F}$ heißt der *relative algebraische Abschluss von F in K.*

Beispiel 11.4.
(1) In der Erweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ ist $\tilde{\mathbb{Q}} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ alg } /\mathbb{Q}\}$ der *Körper der algebraischen Zahlen.*

(2) In der Erweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist $\tilde{\mathbb{Q}}^r := \{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ alg } /\mathbb{Q}\}$ der *Körper der reellen algebraischen Zahlen.*

Es gilt $\tilde{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathbb{C}$ und $\tilde{\mathbb{Q}}^r \subsetneq \mathbb{R}$ (z.B: $\pi, e \in \mathbb{R}\backslash\tilde{\mathbb{Q}}^r$). Eigentlich gilt es ferner: $[\tilde{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] = [\tilde{\mathbb{Q}}^r : \mathbb{Q}] = \infty$, $|\tilde{\mathbb{Q}}| = |\tilde{\mathbb{Q}}^r| = \aleph_0$ und $|\mathbb{C} \setminus \tilde{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R} \setminus \tilde{\mathbb{Q}}^r| = 2^{\aleph_0}$. Siehe ÜB.

Satz 11.5.

$$\underset{\text{alg}}{L/K} \quad \text{und} \quad \underset{\text{alg}}{K/F} \quad \Rightarrow \quad \underset{\text{alg}}{L/F}$$

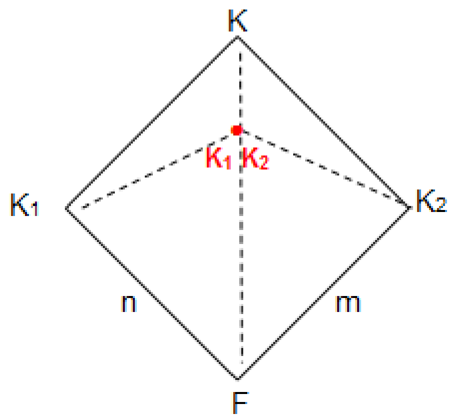
Beweis:
Sei $\alpha \in L$ und $0 \neq k(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$ so dass $k(\alpha) = 0 \qquad (*)$.
Betrachte die folgende Körpererweiterungen:

- $F_1 := F(a_0,\dots,a_n)\,, F_1 \subseteq K\,, a_i$ alg $/F$, also folgt aus Satz 10.13 dass $[F_1 : F] < \infty$.
- $F_1(\alpha) \subseteq L\,, \alpha$ alg $/F_1$ wegen $(*)$, also folgt aus Satz 10.13 dass $[F_1(\alpha) : F_1] < \infty$.
- Es folgt aus Satz 10.11 dass $[F_1(\alpha) : F] = [F_1(\alpha) : F_1][F_1 : F] < \infty$.

Insbesondere folgt nun aus Proposition 10.8 dass $F_1(\alpha)/F$ algebraisch ist, und damit ist α algebraisch über F. □

Definition 11.6.
Seien K/K_1 und K/K_2 Körpererweiterungen. Der Körper $K_1K_2 := K_1(K_2) = K_2(K_1) \subseteq K$ heißt *das Kompositum von K_1 und K_2 in K.*

Lemma 11.7.
Seien K/K_1 und K/K_2 sowie K_1/F und K_2/F Körpererweiterungen, so dass



$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine F-Basis von K_1 und $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ eine F-Basis von K_2 . Es gilt: $\mathrm{span}_F\{\alpha_i\beta_j/i, j\} = K_1K_2$.

Beweis:
Ohne Einschränkung $\alpha_1 = \beta_1 = 1$. Bemerke, dass $K_1K_2 = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_m)$. Nun ist $\mathrm{span}_F\{\alpha_i\beta_j/i, j\} \subseteq K_1K_2$ ein **Teilkörper** von K welcher $F \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ enthält (ÜA). Also gilt auch $\mathrm{span}_F\{\alpha_i\beta_j/i, j\} \supseteq K_1K_2$. □

Korollar 11.8.
Seien $K/K_1, K/K_2; K_1/F, K_2/F$ die Körpererweiterungen wie in Lemma 11.7, setze $[K_1 : F] := n, [K_2 : F] := m$. Es gilt $[K_1K_2 : F] \leq nm$.
Ferner gilt: $[K_1K_2 : F] = mn$, wenn α_i linear unabhängig über K_2 bleiben (oder wenn β_j linear unabhängig über K_1 bleiben.)

Beweis:
Dass $[K_1K_2 : F] \leq nm$, folgt direkt aus dem Lemma 11.7. Wir nehmen an, dass $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ linear unabhängig über K_2 sind und wir zeigen, dass die Familie $\{\alpha_i\beta_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ linear unabhängig über F ist. Seien $(\nu_{ij})_{ij} \subseteq F$ so, dass $\sum_{i,j} \nu_{ij}\alpha_i\beta_j = 0$. Man kann diese Summe umschreiben: $\sum_{i=1}^n \alpha_i(\sum_{j=1}^m \nu_{ij}\beta_j) = 0$. Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\sum_{j=1}^m \nu_{ij}\beta_j \in K_2$. Nach Annahme muss dann $\sum_{j=1}^m \nu_{ij}\beta_j = 0$ gelten für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Weil $\beta_1, \ldots, \beta_m$ linear unabhängig über F sind, muss dann $\nu_{ij} = 0$ gelten für alle i, j.
(Analog kann man die zweite Aussage beweisen). □

Korollar 11.9.
Seien $[K_1 : F] = n, [K_2 : F] = m$ und ggT $(n, m) = 1$. Es gilt $[K_1K_2 : F] = mn$.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{ccc} n & | & [K_1K_2 : F] \\ m & | & [K_1K_2 : F] \end{array}\right\} \Rightarrow kgV(n, m) \mid [K_1K_2 : F]$$

$kgV(n, m) = \frac{nm}{ggT(n,m)} = mn$. Also $mn \leq [K_1K_2 : F] \leq mn$. □

§ 13 Algebraischer Abschluss

Sei K/F stets eine Körpererweiterung.

Definition 11.10.
Sei $f \in F[x]$, $\deg(f) \geq 1$. Der Körper K ist ein *Zerfällungskörper von* f, wenn folgendes gilt:

1. f zerfällt vollständig in lineare Faktoren in $K[x]$, das heißt ist Produkt von linearen Faktoren in $K[x]$.

2. Für alle Körper L mit $F \subseteq L \subsetneq K$ zerfällt f in $L[x]$ **nicht**.

Allgemeiner können wir diesen Begriff für eine Menge von Polynomen erklären:

Bemerkung 11.11.
Sei $\mathcal{E} \subseteq F[x]$. Der Körper K ist ein *Zerfällungskörper von* $\mathcal{E}$ wenn folgendes gilt:

1. Jedes $f \in \mathcal{E}$ mit $\deg(f) \geq 1$ zerfällt vollständig in lineare Faktoren in $K[x]$

2. K wird von den Nullstellen der Polynome in $\mathcal{E}$ erzeugt, also
   $K = F(\{\alpha \in K \mid \exists f \in \mathcal{E} \text{ mit } f(\alpha) = 0\})$

Bemerkung 11.12.
Sei $f \in F[x]$, $\deg(f) \geq 1$. Dann ist K Zerfällungskörper von f genau dann, wenn K Zerfällungskörper von $\mathcal{E} := \{f\}$ ist.

Definition 11.13.
Die Erweiterung K/F ist *normal*, wenn K ein Zerfällungskörper einer Menge $\mathcal{E} \subseteq F[x]$ ist.

Satz 11.14.
Es gibt einen Zerfällungskörper K/F für $f(x)$ über F.

Beweis:
Per Induktion zeigen wir zunächst, dass es eine Körpererweiterung E/F gibt, in der $f(x)$ vollständig zerfällt.
Setze $n = \deg f(x)$. $n = 1, E = F \checkmark$ Induktionsanfang $n > 1$.
Sei $p(x)$ ein irreduzibler Faktor von $f(x)$ in $F[x]$ mit $\deg p \geq 2$ (sonst ist wieder $E = F$).
Sei $\alpha \in E_1/F$ eine Nullstelle von $p(x)$ (s. Satz 9.7), über E_1 haben wir also

$$(*) \qquad f(x) = (x - \alpha) f_1(x)$$

$f_1(x) \in E_1[x]; \deg f_1 \leq n - 1$.

Induktionsannahme für f_1 und E_1 ergibt eine E/E_1 und f_1 zerfällt vollständig in $E[x]$. Nun ist auch $\alpha \in E$. Also zerfällt f wie in $(*)$ vollständig über E.
Setze nun $K := \bigcap\{L/F \subseteq L \subseteq E; f \text{ zerfällt vollständig in } L[x]\}$ □

Proposition 11.15.
Sei $\deg f = n \geq 1$, und K/F ein Zerfällungskörper von f über F. Es gilt $[K : F] \leq n!$

Beweis:
Sei $\alpha_1 \in F_1/F$, α_1 ist Nullstelle von f. Dann ist $[F_1 : F] \leq n$ und $f(x) = (x - \alpha_1)f_1(x)$, $f_1(x) \in F[x]$, $\deg f_1 \leq n-1$. Wiederholung des Vorgangs ergibt: Sei $\alpha_2 \in F_2/F_1, \alpha_2$ ist Nullstelle von f_1. Dann ist $[F_2 : F_1] \leq n-1$, und damit $[F_2 : F] \leq n(n-1)$ (wegen Satz 10.11).
Wir verfahren so weiter (ÜA). $\square$