12 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir Abschnitt 13 beenden; unser Endresultat ist Korollar 12.6 wo wir die Existenz und Eindeutigkeit für algebraische Abschluss etablieren.

In Satz 11.14 haben wir die Existenz vom Zerfällungskörper gezeigt, nun zeigen wir die Eindeutigkeit:

Satz 12.1.
Seien F und F' Körper und $\varphi : F \overset{\sim}{\to} F'$ eine Isomorphie, $f(x) \in F[x]$ mit $\deg f \geq 1$ und $\varphi(f) := f'(x) \in F'[x]$ das Bild von f (nach Anwendung von φ auf die f-Koeffiziente). Seien E Zerfällungskörper für f über F und E' ist Zerfällungskörper für f' über F'.
Dann läßt sich φ fortsetzen:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sigma", "\sim"'] \arrow[d, dash] & E' \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & F' \end{tikzcd}$$

Beweis:
Sei $\deg f := n$. Beweis per Induktion nach n. Es ist klar dass wenn f über F als Produkt von linearen Faktoren zerfällt, dann zerfällt ebenfalls f' über F' als Produkt von linearen Faktoren (ÜA). In diesem Fall $E = F$ und $E' = F'$ und wir setzen $\sigma = \varphi$.

Sei also $p(x)$ ein irreduzibler Faktor von $f(x)$ in $F[x]$ mit $\deg p \geq 2$ und $p' = \varphi(p)$ der entsprechende irreduzibler Faktor von $f'(x)$ in $F'[x]$ (s. Satz 9.14). Sei $\alpha \in E$ eine Nullstelle für $p(x)$ und $\beta \in E'$ eine Nullstelle für $p'(x)$. Setze $F_1 := F(\alpha)$ und $F_1' := F'(\beta)$.

Aus Satz 9.14. folgt, dass ein σ_1 existiert, so dass

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "\sim", "\sigma_1"'] \arrow[d, dash] & F_1' \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & F' \end{tikzcd}$$

Nun haben wir also den folgenden Ansatz:

$$\sigma_1 : F_1 \overset{\sim}{\longrightarrow} F_1'$$

und $f(x) = (x - \alpha) f_1(x)$ über F_1, mit $\deg f_1 \leq n - 1$. Bemerke dass E ein Zerfällungskörper von f_1 über F_1 ist: $E \supseteq F_1$ und E enthält alle Nullstellen von f_1 ; und für L mit $E \supsetneq L \supseteq F_1$, ist es unmöglich, dass L alle Nullstellen von f_1 enthält (sonst enthält L auch α und alle Nullstellen von f_1, also alle Nullstellen von f - Widerspricht Minimalität von E als ein Zerfällungskörper von f über F). Analog ist $f'(x) = (x - \beta) f_1'(x)$ über F_1', $\deg f_1' \leq n - 1$ und E' ist ein Zerfällungskörper von f_1' über F_1' . Also haben wir nun den Ansatz f_1, F_1, σ_1 mit $\deg f_1 \leq n - 1$ für die Induktion.

Die Induktionsannahme liefert ein σ, so dass

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, dash] & E' \arrow[d, dash] \\ F_1 \arrow[r, "\sim", "\sigma_1"'] & F_1' \end{tikzcd}$$

Also

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, dash] & E' \arrow[d, dash] \\ F_1 \arrow[r, "\sim", "\sigma_1"'] \arrow[d, dash] & F_1' \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & F' \end{tikzcd}$$

□

Korollar 12.2.
Ein Zerfällungskörper von $f \in F[x]$ über F ist bis Isomorphie auf F eindeutig.

Beweis:
Seien K und K' Zerfällungskörper von f über F. Wegen Satz 12.1 gilt:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, dash] & K' \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "Id"] & F \end{tikzcd}$$

mit $\sigma|F = Id$ □

Definition 12.3.
(a) $\tilde{F}/F$ ist ein *algebraischer Abschluss* von F, falls
  (a) $\tilde{F}/F$ algebraisch ist;
  (b) jedes $f(x) \in F[x]$ mit $\deg f \geq 1$ zerfällt vollständig als Produkt von linearen Faktoren über $\tilde{F}$.

(b) K heißt *algebraisch abgeschlossen*, falls jedes $f \in K[x]$ mit $\deg f \geq 1$ eine Nullstelle in K hat.

Bemerkung 12.4.
K ist algebraisch abgeschlossen $\Leftrightarrow$ jedes $f \in K[x]$ mit $\deg f \geq 1$ zerfällt vollständig in linearen Faktoren über $K \Leftrightarrow K = \tilde{K}$.

Proposition 12.5.
Sei $\tilde{F}$ ein algebraischer Abschluss von F. Dann ist $\tilde{F}$ algebraisch abgeschlossen.

Beweis:
Sei $f(x) \in \tilde{F}(x)$ $\deg f \geq 1$, α ist Nullstelle von $f(x)$ (in irgend einer Körpererweiterung $K/\tilde{F}$, s. Satz 9.7). Dann ist $\tilde{F}(\alpha)/\tilde{F}$ algebraisch und $\tilde{F}/F$ algebraisch. Also ist auch $\tilde{F}(\alpha)/F$ algebraisch (s. Satz 11.5) und damit ist auch α/F algebraisch.
Sei $m_{\alpha,F}$ das Minimalpolynom von α/F, dann zerfällt $m_{\alpha,F}$ in $\tilde{F}[x]$ und hat $(x-\alpha)$ als linearen Faktor. Es folgt $\alpha \in \tilde{F}$. □

Sei F ein beliebiger Körper. Wir zeigen nun:
Hauptsatz
Es gibt eine algebraische abgeschlossene Körpererweiterung von F.

Beweis:
Setze $F = K_0$. Wir definieren per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ eine ansteigende Folge

$$K_0 \subseteq \cdots \subseteq K_j \subseteq K_{j+1} \subseteq \cdots$$

von der Körpererweiterung, so dass jedes Polynom $f \in K_{j-1}[x]$ mit $\deg f \geq 1$ eine Nullstelle in K_j hat. Dann setzen wir $K := \bigcup K_j$. Dann ist K/F eine Körpererweiterung,und wenn $f(x) \in K[x]$ $(\deg f \geq 1)$, dann existiert ein j mit $f(x) \in K_j[x]$ und f hat eine Nullstelle in $K_{j+1} \subseteq K$. Also ist K algebraisch abgeschlossen.

Und nun zur Induktion:
Für $f(x) \in F[x](\deg f \geq 1)$ sei x_f eine neue Variable. Betrachte $F[\cdots, x_f, \cdots]$ (Polynomring in der Variablen x_f ; siehe ÜB) und das Ideal $I :=< \{f(x_f); f \in F[x]\} >$.

Behauptung:
I ist echt. Sonst ist

$$1 = g_1 f_1(x_{f_1}) + \cdots + g_n f_n(x_{f_n})(*)$$

mit $g_i \in F[\cdots, x_f, \cdots]$. Schreibe $x_i := x_{f_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ und seien $x_{n+1}, \ldots, x_m$ alle anderen Variablen, die unter den g_i's noch vorkommen. Also ist

$$1 = g_1(x_1, \ldots, x_m) f_1(x_1) + \cdots + g_n(x_1, \ldots, x_m) f_n(x_n)(*)$$

eine polynomiale Gleichung.
Sei F'/F eine Körpererweiterung mit $\alpha_i \in F'$, Nullstelle für $f_i(x)$. Durch Einsetzen von α_i für x_i mit $i = 1, \ldots, n$ und 0 für x_j mit $j = n-1, \ldots, m$ in $(*)$ muss es immer noch eine Gleichung ergeben, die nun im Körper F' gelten muss, das heißt $1 = 0$ in F' - Widerspruch.

I ist echt. Per ZL, sei $\mathcal{M}$ maximal. $\mathcal{M} \triangleleft F[\cdots, x_f, \cdots]$ und $I \subseteq \mathcal{M}$. Setze $K_1 := F[\cdots, x_f, \cdots]/\mathcal{M}$. K_1/K_0 und $f \in K_0[x]$ hat eine Nullstelle in K_1, weil $f(\overline{x_f}) = \overline{f(x_f)} = 0$ (da $f(x_f) \in I$).
Wiederhole mit K_j/K_{j-1} und setze $K = \bigcup K_j$ wie schon erwähnt. □

Korollar 12.6.
Existenz:: Sei K algebraisch abgeschlossen und $F \subseteq K$. Dann ist der relative algebraische Abschluss von F in K ein algebraischer Abschluss von F.
Eindeutigkeit: (siehe ÜB)
Ein algebraischer Abschluss von F ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis:
Per Definition ist $\tilde{F}/F$ algebraisch. Sei $f(x) \in F[x]$ $(\deg f \geq 1)$, da K algebraisch abgeschlossen ist, $K[x] \ni f(x)$ zerfällt vollständig in lineare Faktoren $(x-\alpha)$ in $K[x]$. Aber α ist algebraisch über F und $\alpha \in K$, also $\alpha \in \tilde{F}$. Also zerfällt $f(x)$ in $\tilde{F}[x]$. □