15 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem skript werden wir Abschnitt 15 beenden, indem wir die zyklische Untergruppen studieren. Im Abschnitt 16 werden wir Homomorphismen und Faktorgruppen untersuchen, dabei werden wir normale Untergruppen kennenlernen.

Notation: Seien K, H und G stets Gruppen. Wir schreiben $K \leq H$ für: K ist eine Untergruppe von H.

Satz 15.1.
Sei $H =< x >$ zyklisch

(1) Sei $K \leq H$, dann ist K zyklisch.

(2) Wenn $|H| = \infty$, dann sind $< x^j > \neq < x^i >$ für $i \neq j$ und $\{< x^i > ; i \in \mathbb{N}_0\}$ ist die Menge aller Teilgruppen von H.

(3) Wenn $|H| = n$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $a \mid n$, dann gibt es eine eindeutige Teilgruppe der Ordnung a, nämlich $< x^{n/a} >$. Die Menge aller nicht-trivialen Teilgruppen von H ist $\{< x^d >; d \in \mathbb{N}, d|n\}$.

Beweis:

(1) $K = \{1\}$ ist zyklisch, also ohne Einschränkung $K \neq \{1\}$.
Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste, so dass $x^k \in K$. Also ist $< x^k > \leq K$.
Sei $x^a \in K; DA \Rightarrow a = qk + r$ mit $0 \leq r < k$ und $x^r = x^a x^{-qk} \in K$.
Da k minimal gewählt ist, muss $r = 0$ sein. Also $a = qk$ und $x^a = (x^k)^q \in < x^k >$.
Also $K \leq < x^k >$.

(2) ÜA.

(3) Sei $d := \frac{n}{a}$, also $d|n$ und $|x^d| = \frac{n}{ggT(n,d)} = n/d = n/(n/a) = a$. Somit ist $| < x^d > | = a$.
Eindeutigkeit: Sei $K \leq H$ mit $|K| = a$ und $b \in \mathbb{N}$ kleinste, so dass $K =< x^b >$. Wir berechnen $\frac{n}{d} = a = |K| = |x^b| = \frac{n}{ggT(n,b)}$. Daraus folgt $d = ggT(n, b)$, insbesondere $d|b$. Also $x^b \in < x^d >$ und $K =< x^b > \leq < x^d >$.
Da aber $|K| = a = | < x^d > |$, folgt nun $K =< x^d >$. □

§16: Faktorgruppen

Proposition 15.2.
Sei $\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge von Teilgruppen von H, dann ist $\bigcap \mathcal{A}$ auch eine Teilgruppe.

Beweis:
Setze $K := \bigcap \mathcal{A}; a, b \in K \Rightarrow ab^{-1} \in A$, für alle $A \in \mathcal{A}$ (weil $A \leq H$), also $ab^{-1} \in K$ und damit $K \leq H$. □

Definition 15.3.
Sei $S \subseteq H$ eine Untermenge; $\mathcal{A} := \{K \leq H; S \subseteq K\}$.
Definiere $< S >= \bigcap \mathcal{A}$. Dann ist $< S >$ die (für die Inklusion) kleinste Teilgruppe von H, die S enthält. $< S >$ heißt die *Teilgruppe, die von S erzeugt ist.*
Konvention: $< \varnothing >= \{1\}$
Notation: $S = \{a_1, \dots, a_n\}; < S >=< a_1, \dots, a_n >$ (wenn S endlich ist).

Proposition 15.4.
Sei $S \neq \varnothing$. Dann ist $< S >= \{a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}; n \in \mathbb{N}; a_i \in S; \varepsilon_i = \pm 1\}$.

Beweis:
Diese Menge ist eine Teilgruppe (ÜA). Sie enthält S und muss in jeder Teilgruppe, die S enthält enthalten sein. □

Der Beweis dieser Proposition ist analog wie für Ringhomomorphismen und wird als ÜA überlassen:

Proposition 15.5.
Sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Es gelten
(1) $\varphi(1) = 1$
(2) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$
(3) $\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
(4) $\ker \varphi := \{g \in G; \varphi(g) = 1\} \leq G$
(5) $\operatorname{im} \varphi := \{h \in H; \exists g \in G : \varphi(g) = h\} \leq H$

Wir wollen Faktorengruppen definieren.

Definition 15.6.
Sei $H \leq G$ und $g \in G$. Dann ist $gH := \{gh \mid h \in H\}$ ist die *linke Nebenklasse von g bezüglich H* und $Hg := \{hg \mid h \in H\}$ ist die *rechte Nebenklasse von g bezüglich H.*
Additive Notation: $g + H$ und $H + g$

Proposition 15.7.
Sei $H \leq G$. Es gelten:

(1) Die Menge der linken Nebenklassen bilden eine Partition von G i.e. $G = \bigcup_{g \in G} gH$ und $uH \cap vH \neq \varnothing \Rightarrow uH = vH$.
(2) Für alle $u, v \in G : uH = vH \Leftrightarrow v^{-1}u \in H$.

Beweis:
(1) $1 \in H$, also $g \in gH$ für alle $g \in G$. Also $G = \bigcup gH$. Sei $uH \cap vH \neq \varnothing$. Sei $x \in uH, x \in vH$, also $x = uh_1 = vh_2$ für geeignete $h_1, h_2 \in H$. Also $u = v \underbrace{h_2 h_1^{-1}}_{\in H}$.
Sei $t \in H$. Es gilt also $ut = v(h_2 h_1^{-1})t = v(h_2 h_1^{-1} t) \in vH$, somit $uH \subseteq vH$.
Analog: $uH \supseteq vH$.
(2) $uH = vH$ genau dann, wenn $u \in vH$ genau dann, wenn $u = vh$ für ein $h \in H$ genau dann, wenn $v^{-1}u \in H$. □

Proposition 15.8.
Sei $N \leq G$. Die Verknüpfung
$$(uN)(vN) := (uv)N$$
ist wohldefiniert genau dann, wenn

(*) $$gng^{-1} \in N \text{ für alle } g \in G; \text{ für alle } n \in N$$

Beweis:
"⇒" Wohldefiniert →
$$\left.\begin{array}{l} u, u_1 \in uN \\ v, v_1 \in vN \end{array}\right\} \Rightarrow (uv)N = (u_1v_1)N$$
Sei $g \in G, n \in N$, dann setze $u = 1, v = g^{-1}, u_1 = n, v_1 = g^{-1} \Rightarrow 1g^{-1}N = ng^{-1}N$ i.e. $g^{-1}N = ng^{-1}N$.

Nun: $ng^{-1} \in ng^{-1}N$, also $ng^{-1} \in g^{-1}N$. Also $ng^{-1} = g^{-1}n_1$ für geeignetes $n_1 \in N$. Also $gng^{-1} = n_1 \in N$.

"⇐" Sei $u, u_1 \in uN, v, v_1 \in vN$. Zu zeigen: $(uv)N = (u_1v_1)N$.
Schreibe $u_1 = un, v_1 = vm; n, m \in N$. Wir zeigen: $u_1v_1 \in (uv)N$.
Wir berechnen: $u_1v_1 = (un)(vm) = u(vv^{-1})nvm = uv(\underbrace{v^{-1}nv}_{:=n_1 \in N})m = uvn_1m = uv(\underbrace{n_1m}_{\in N})$ □

Zusatz zu Proposition 15.8.
Wenn wohldefiniert, dann definiert die Verknüpfung $(uN)(vN) := (uv)N$ eine Gruppenoperation auf die Menge der linken Nebenklassen. (ÜA).

Definition 15.9.
1. Sei $N \leq G$. N ist *normal*, falls $(*)$ in Proposition 15.8. gilt. Wir schreiben dafür: $N \trianglelefteq G$.
2. Für $N \trianglelefteq G$ bezeichnen wir G/N *die Gruppe der linken Nebenklassen* .

Beispiel:
Sei φ ein Homomorphismus, $N := \ker \varphi$ ist normal, weil
$$\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = 1 \, .$$
Also $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und $n \in N$.

Die Umkehrung gilt auch (ÜA):

Proposition 15.10.
Für $N \trianglelefteq G$ ist die kanonische Projektion $\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \longrightarrow & G/N \\ & g & \mapsto & gN \end{array}$
ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker \varphi = N$.