# 16 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

**Prof. Dr. Salma Kuhlmann**

*In diesem Skript wollen wir die Menge der Nebenklassen, normale Teilgruppen, sowie Faktorgruppen weiter untersuchen. Im Abschnitt 17 werden wir zunächst die Anzahl der Nebenklassen allgemein berechnen; insbesondere bestimmen wir die Kardinalität einer Faktorgruppe. Im Abschnitt 18 werden wir diesbezüglich den ersten von insgesamt vier Isomorphiesätze studieren.*

## §17: Satz von Lagrange

**Definition 16.1.** Der *Index* einer Teilgruppe $H$ in einer Gruppe $G$, bezeichnet mit $[G : H]$, ist die Anzahl der Linksnebenklassen von $H$ in $G$
($[G : H]$ ist entweder eine natürliche Zahl oder unendlich).

**Satz 16.2** (Lagrange)**.** Seien $G$ eine endliche Gruppe und $H$ eine Teilgruppe von $G$. Dann:

(i) $|H|$ teilt $|G|$

(ii) Es gilt $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$.

(iii) Insbesondere für $H \trianglelefteq G$ ist $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$.

*Beweis.* Die Menge der linken Nebenklassen bilden eine Partition von $G$ (Proposition 15.7). Da $G$ endlich ist, ist also $n := [G : H]$ eine natürliche Zahl und es existieren $g_1, \dots, g_n \in G$ mit

- $G = \bigcup_{i=1}^n g_i H$
- für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt $g_i H \cap g_j H = \emptyset$.

Es genügt also zu zeigen, dass jede Nebenklasse von $H$ in $G$ Kardinalität $|H|$ hat.
Sei also $g \in G$. Die Abbildung

$$\varphi_g : H \to gH; \quad h \mapsto gh$$

ist surjektiv, nach Definition. Sie ist auch injektiv, denn, wenn für $h_1, h_2 \in H$ gilt

$$gh_1 = \varphi_g(h_1) = \varphi_g(h_2) = gh_2$$

dann ergibt Multiplikation mit $g^{-1}$ die Gleichheit $h_1 = h_2$. Es folgt, dass für alle Nebenklassen $gH$ von $H$

$$|gH| = |H|$$

gilt. Daher

$$|G| = \sum_{i=1}^n |g_i H| = \sum_{i=1}^n |H| = [G : H]|H|$$

woraus (i) und (ii) folgen. □

**Bemerkung:** Im obigen Beweis hätten wir auch mit Rechtsnebenklassen arbeiten können. Daher, die Anzahl der Linksnebenklassen von $H$ ist gleich wie die von Rechtsnebenklassen. Allgemeiner, die Abbildung $gH \mapsto Hg^{-1}$ ist eine Bijektion zwischen die Menge der Links- und Rechtsnebenklassen von $H$ in $G$. (ÜA)

**Korollar 16.3.** Sei $G$ eine endliche Gruppe. Für alle $x \in G$ teilt $|x|$ die Ordnung $|G|$. Insbesondere gilt für alle $x \in G$: $x^{|G|} = 1$.

*Beweis.* Nach Proposition 14.3. und Satz 16.2 gilt $|x| = |\langle x \rangle| \;\big|\; |G|$. □

**Beispiel:** Die Umkehrung des Satzes von Lagrange gilt nicht. Es gibt endliche Gruppen $G$ und $m \in \mathbb{N}$ so dass $m \mid |G|$, jedoch besitzt $G$ keine Teilgruppe der Ordnung $m$: Sei $G = A_4$. Die Elemente von $A_4$ sind alle gerade Permutationen auf 4 Elementen:

$$A_4 = \{e,\ (123),\ (132),\ (234),\ (243),\ (134),\ (143), (124),\ (142),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$$

Es gilt $|A_4| = 12$, und $6 \mid 12$, aber $A_4$ hat keine Teilgruppe der Ordnung 6. (ÜA)

**Korollar 16.4.** Jede Gruppe primer Ordnung ist zyklisch.

*Beweis.* Sei $G$ eine endliche Gruppe mit $|G|$ prim. Sei $x \in G, x \neq 1$. Nach Korollar 16.3 teilt $|x|$ die Ordnung $|G|$. Da $|G|$ prim ist, folgt entweder $|x| = |G|$ oder $|x| = 1$. Aus $x \neq 1$ folgt $|x| \neq 1$ also $|x| = |G|$ und somit $\langle x \rangle = G$. □

*Wir betrachten nun weitere Gruppenkonstruktionen, die wir später im §18 für die Isomorphiesätze brauchen.*

**Bezeichnung 16.5.** Sei $G$ eine Gruppe und seien $S, T$ Teilmenge von $G$. Schreibe:

$$ST := \{st : s \in S,\ t \in T\}.$$

**Proposition 16.6.** Sei $G$ eine endliche Gruppe und seien $H, K$ Teilgruppe. Dann gilt

$$|HK||H \cap K| = |H||K|.$$

*Beweis.* Definiere eine Abbildung

$$\varphi : H \times K \to HK,\ (h, k) \mapsto hk.$$

Nach Definition ist $\varphi$ surjektiv.

Behauptung: für alle $(h, k) \in H \times K$ gilt $\varphi^{-1}(hk) = \{(hd^{-1}, dk) : d \in H \cap K\}$.
*Beweis der Behauptung:*
"$\supseteq$": offensichtlich, wenn $d \in H \cap K$ dann auch $d^{-1} \in H \cap K$ somit $h' = hd^{-1} \in H$ und $k' = dk \in K$ und $h'k' = hk$.
"$\subseteq$": seien $h' \in H$ und $k' \in K$ mit $h'k' = hk$. Dann $d := k'k^{-1} = h'^{-1}h \in H \cap K$ und $h' = hd^{-1}$ und $k' = dk$. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Es folgt, dass für alle $x \in HK$, $|\varphi^{-1}(x)| = |H \cap K|$ gilt und somit

$$|HK||H \cap K| = |H \times K| = |H||K|.$$

□

**Proposition 16.7.** Sei $G$ eine Gruppe und seien $H, K$ Teilgruppen. Die Menge $HK$ ist genau dann eine Teilgruppe wenn $HK = KH$.

*Beweis.* Wir bemerken die folgende allgemeine Tatsache: Seien $h \in H$ und $k \in K$. Dann $hk \in HK$ und $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$. Also $g \in HK \iff g^{-1} \in KH$.

Sei nun $HK$ eine Teilgruppe und sei $g := hk \in HK$. Dann ist $g^{-1} \in HK$, und somit $g = (g^{-1})^{-1} \in KH$. Somit $HK \subseteq KH$. Die Inklusion $KH \subseteq HK$ wird analog bewiesen.

Umgekehrt sei nun $HK = KH$. Bemerke dass $HK \neq \varnothing$. Seien $h_1, h_2 \in H$ und $k_1, k_2 \in K$. Betrachte $h_1k_1h_2k_2$. Da $k_1h_2 \in KH = HK$ gilt, dann existieren $h_3 \in H$ und $k_3 \in K$ mit $k_1h_2 = h_3k_3$. Daher $h_1(k_1h_2)k_2 = (h_1h_3)(k_3k_2) \in HK$. Also $HK$ ist bezüglich Multiplikation abgeschlossen. Wir haben weiterhin oben gemerkt, dass $g \in HK$ impliziert $g^{-1} \in KH$. Da $KH = HK$ ist also $HK$ auch bezüglich Inversen abgeschlossen, und somit eine Teilgruppe. □

**Definition 16.8.** Sei $A$ eine Teilgruppe von $G$. Der *Normalisator* von $A$ in $G$, bezeichnet $N_G(A)$, ist die Menge

$$N_G(A) = \{x \in G : xAx^{-1} = A\}$$

**Bemerkung 16.9.** $N_G(A)$ ist eine Teilgruppe von $G$ die $A$ enthält, $A$ ist genau dann normal in $G$ wenn $G = N_G(A)$ (ÜA).

**Korollar 16.10.** Seien $H, K$ Teilgruppen von $G$ mit $H \leq N_G(K)$. Dann ist $HK$ eine Teilgruppe von $G$. Insbesondere, wenn $K \trianglelefteq G$ dann $HK \leq G$ für alle $H \leq G$.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass $HK = KH$. Seien $h \in H$ und $k \in K$. Dann $h^{-1}kh, hkh^{-1} \in K$ weil $H \leq N_G(K)$. Daher $hk = (hkh^{-1})h \in KH$ und $kh = h(h^{-1}kh) \in HK$. Somit $HK = KH$. □

## §18: Isomorphiesätze

**Satz 16.11** (Erster Isomorphiesatz)**.** Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann $\ker\varphi \trianglelefteq G$ und

$$G/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi.$$

*Beweis.* Es wurde bereits bewiesen, dass der Kern eines Gruppenhomomorphismus normal ist (s. Skript 15; Beispiel nach Definition 15.9).
Definiere $f\colon G/\ker\varphi \to H$ durch $f(a\ker\varphi) = \varphi(a)$.

- $f$ ist wohldefiniert, denn wenn $a\ker\varphi = b\ker\varphi$ dann $ab^{-1} \in \ker\varphi$ also $1 = \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$ und somit $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- $f$ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn

$$f((a\ker\varphi)(b\ker\varphi)) = f(ab\ker\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = f(a\ker\varphi)f(b\ker\varphi).$$

- $\operatorname{im} f = \operatorname{im}\varphi$. Klar.
- $f$ ist injektiv: Seien $f(a\ker\varphi) = f(b\ker\varphi)$. Dann $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = 1 \Rightarrow ab^{-1} \in \ker\varphi \Rightarrow a\ker\varphi = b\ker\varphi$.

Also $f\colon G/\ker\varphi \to \operatorname{im}\varphi$ ist also ein bijektiver Gruppenhomomorphismus (ein Isomorphismus).
□

**Korollar 16.12.** Sei $\varphi: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann

(1) $\varphi$ ist genau dann injektiv wenn $\ker \varphi = 1$;

(2) $[G : \ker \varphi] = |\mathrm{im}\ \varphi|$.

*Beweis.* (1) Die Hinrichtung folgt direkt aus der Definition von Injektivität.

Für die Rückrichtung, sei $\ker \varphi = 1$ und seien $a, b \in G$ mit $\varphi(a) = \varphi(b)$. Dann $\varphi(ab^{-1}) = 1 \Rightarrow ab^{-1} \in \ker \varphi \Rightarrow ab^{-1} = 1 \Rightarrow a = b$.

(2) Aus dem ersten Isomorphiesatz, folgt $[G : \ker \varphi] = |G/\ker \varphi| = |\mathrm{im}\ \varphi|$.

□