17 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript wollen wir weitere Isomorphiesätze kennenlernen, und damit §18 beenden.

Wir ergänzen Bemerkung 16.9:

Bemerkung 17.1. Seien $A \leq B \leq G$ Gruppen. Der Normalisator $N_G(A)$ von A in G ist die größte Teilgruppe von G in der A normal ist; A ist genau dann normal in B wenn $B \leq N_G(A)$. (siehe ÜB).

Satz 17.2 (Zweiter Isomorphiesatz)**.** Sei G eine Gruppe und seien A, B Teilgruppen mit $A \leq N_G(B)$. Dann ist AB eine Teilgruppe von G, $B \trianglelefteq AB$, $A \cap B \trianglelefteq A$ und $AB/B \simeq A/(A \cap B)$.

Beweis. Aus $A \leq N_G(B)$ folgt $AB \leq G$ (Korollar 16.10). Aus $B \leq N_G(B)$ folgt $AB \leq N_G(B)$, also $B \trianglelefteq AB$ (Bemerkung 17.1).
Sei nun $\pi: AB \to (AB)/B$ die kanonische Projektion, und betrachte die Einschränkung $\pi|_A$ von π auf A. Für $a \in A$ mit $\pi(a) = 1$ gilt auch $a \in B$, daher $a \in A \cap B$. Also ist $\ker(\pi|_A) = A \cap B$, und daher $A \cap B \trianglelefteq A$.
Seien nun $a \in A$ und $b \in B$. Es gilt $\pi(a) = \pi(ab)$. Also ist $\pi|_A$ surjektiv, d.h., im $(\pi|_A) = (AB)/B$. Der erste Isomorphiesatz (Satz 16.11) ergibt nun $A/(A \cap B) \simeq (AB)/B$. □

Satz 17.3 (Dritter Isomorphiesatz)**.** Sei G eine Gruppe und seien $H, K \trianglelefteq G$ normale Teilgruppen mit $H \leq K$. Dann $K/H \trianglelefteq G/H$ und

$$(G/H)/(K/H) \simeq G/K.$$

Beweis. Definiere die Abbildung $f: G/H \to G/K$ durch $f(gH) = gK$.

- f ist wohldefiniert, da für $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1H = g_2H$ gilt $g_1^{-1}g_2 \in H$ und $g_1^{-1}g_2 \in K$. Also $g_1K = g_2K$ (s. Proposition 15.7).
- f ist ein Gruppenhomomorphismus:
$$f(aHbH) = f(abH) = abK = aKbK = f(aH)f(bH).$$
- f ist surjektiv: klar.
- Bemerke dass $H \trianglelefteq K$, so dass K/H eine Gruppe ist, also $K/H \leq G/H$ ist eine Untergruppe (s. Proposition 15.8). Wir behaupten dass $\ker f = K/H$. In der Tat, sei $a \in G$. Dann $f(aH) = 1K \iff aK = 1K \iff a \in K$. Daher $K/H = \ker f$. Also $K/H \trianglelefteq G/H$ und (s. Satz 16.11) es folgt:
$$(G/H)/(K/H) \simeq G/K.$$

□

Satz 17.4. (Gitter Isomorphiesatz / Korrespondenzsatz) Sei G eine Gruppe und N eine normale Teilgruppe von G. Für eine Teilgruppe A die N enthält, sei $\bar{A} := A/N$. Sei $\pi : G \to G/N$ die kanonische Projektion.

Die Abbildung $A \mapsto \pi(A) = \bar{A}$ ist eine Bijektion zwischen der Menge der Teilgruppen von G die N enthalten und der Menge der Teilgruppen von G/N.

Weiter, für $A, B \leq G$ mit $N \leq A$ und $N \leq B$ gelten:

1. $A \leq B \iff \bar{A} \leq \bar{B}$; in diesem Fall, gilt $[B : A] = [\bar{B} : \bar{A}]$.
2. $A \trianglelefteq B \iff \bar{A} \trianglelefteq \bar{B}$; in diesem Fall, gilt $B/A \simeq \bar{B}/\bar{A}$.
3. $\overline{\langle A, B\rangle} = \langle \bar{A}, \bar{B}\rangle$.
4. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Beweis. Siehe ÜB. □

Satz 17.5. (Schmetterlingslemma / Lemma von Zassenhaus) Seien $a \trianglelefteq A$ und $b \trianglelefteq B$ Teilgruppen einer Gruppe G. Dann

1. $a(A \cap b) \trianglelefteq a(A \cap B)$
2. $b(B \cap a) \trianglelefteq b(B \cap A)$
3. $(A \cap b)(B \cap a) \trianglelefteq A \cap B$
4. $$\frac{a(A \cap B)}{a(A \cap b)} \simeq \frac{A \cap B}{(A \cap b)(B \cap a)} \simeq \frac{b(B \cap A)}{b(B \cap a)}$$

Beweis. Aus $A \leq N_G(a)$ beziehungsweise $B \leq N_G(b)$ folgen :

$$A \cap b \leq A \cap B \leq N_G(a) \quad \text{beziehungsweise} \quad B \cap a \leq A \cap B \leq N_G(b).$$

(s. Bemerkungen 16.9 und 17.1).

• Daher sind $a(A \cap b), a(A \cap B), b(B \cap a)$ und $b(A \cap B)$ Teilgruppen von G (s. Korollar 16.10).

Zunächst zeigen wir 3.

• Bemerke, dass $A \cap b$ und $B \cap a$ normale Teilgruppen von $A \cap B$ sind. Wir führen den Beweis für $A \cap b$ (der Beweis für $B \cap a$ ist analog): Für $g \in A \cap B$ und $c \in A \cap b$ gelten $gcg^{-1} \in b$ (weil $b \trianglelefteq B$) und $gcg^{-1} \in A$ weil $c, g \in A$.

• Also ist $(A \cap b)(B \cap a) \leq A \cap B$ (s. Korollar 16.10). Es folgt übrigens dass $(A \cap b)(B \cap a) = (B \cap a)(A \cap b)$ (s. Proposition 16.7).

• Jetzt prüfen wir dass $(A \cap b)(B \cap a)$ eine normale Teilgruppe von $A \cap B$ ist: für $c \in A \cap b$ und $d \in B \cap a$ gilt $gcdg^{-1} = gcg^{-1}gdg^{-1} \in (A \cap b)(B \cap a)$.

Jetzt zeigen wir 4 (und zugleich 1. beziehungsweise 2.).

Ein Element $x \in a(A \cap B)$ lässt sich als $x = \alpha\gamma$ darstellen mit $\alpha \in a$ und $\gamma \in A \cap B$. Definiere

$$f : a(A \cap B) \to \frac{A \cap B}{(A \cap b)(B \cap a)}$$

durch

$$x \mapsto \gamma(A \cap b)(B \cap a).$$

• f ist wohldefiniert: sei $\alpha\gamma = \alpha'\gamma'$. Dann $\gamma'\gamma^{-1} = (\alpha')^{-1}\alpha \in a \cap B \cap A = a \cap B \leq (A \cap b)(B \cap a)$, d.h.:

$$\gamma'(A \cap b)(B \cap a) = \gamma(A \cap b)(B \cap a).$$

• f ist ein Gruppenhomomorphismus: seien $\alpha, \alpha' \in a$ und $\gamma, \gamma' \in A \cap B$. Dann $\alpha, \gamma\alpha'\gamma^{-1} \in a$ weil $a \lhd A$. Also

$$f(\alpha\gamma\alpha'\gamma') = f((\alpha\gamma\alpha'\gamma^{-1})\gamma\gamma') = \gamma\gamma'(A \cap b)(B \cap a)$$

und da $(A \cap b)(B \cap a) \lhd A \cap B$ folgt

$$f(\alpha\gamma)f(\alpha'\gamma') = \gamma(A \cap b)(B \cap a)\gamma'(A \cap b)(B \cap a) = \gamma\gamma'(A \cap b)(B \cap a).$$

• f ist surjektiv: nach Definition.

• Es gilt $\ker f = a(A \cap b)$. In der Tat, seien $\alpha \in a$ und $\gamma \in A \cap B$ mit $f(\alpha\gamma) = 1(A \cap b)(B \cap a)$, d.h., $\gamma \in (A \cap b)(B \cap a)$. Seien $x \in (A \cap b)$ und $y \in (B \cap a)$ mit $\gamma = xy$. Dann $\alpha\gamma = (\alpha x)y \in a(A \cap b)$. Umgekehrt, seien $\alpha \in a$ und $\gamma \in A \cap B$ mit $\alpha\gamma \in a(A \cap b)$. Dann existieren $t \in a$, $s \in A \cap b$ mit $\alpha\gamma = ts$. Nun $\alpha^{-1}t \in a$ und aus $\gamma, s \in B$ folgt $\alpha^{-1}t = \gamma s^{-1} \in B$. Also $\alpha^{-1}ts = \gamma \in (B \cap a)(A \cap b) = (A \cap b)(B \cap a)$ und somit $\alpha\gamma \in \ker f$.

• Nach dem ersten Isomorphiesatz ist $a(A \cap b)$ normal in $a(A \cap B)$ (was 1. zeigt) und

$$\frac{a(A \cap B)}{a(A \cap b)} \simeq \frac{(A \cap B)}{(A \cap b)(B \cap a)}.$$

• Wenn wir nun A und B und, entsprechend, a und b umtauschen und den gleichen Beweis durchführen bekommen wir 2. und

$$\frac{b(A \cap B)}{b(B \cap a)} \simeq \frac{(A \cap B)}{(A \cap b)(B \cap a)}.$$

Das Schmetterlingsdiagramm:

$$\begin{tikzcd}
a(A\cap B) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & b(A\cap B) \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
a(A\cap b) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & A\cap B \arrow[d, dash] & b(a\cap B) \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
a \arrow[d, dash] & (A\cap b)(a\cap B) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & b \arrow[d, dash] \\
a\cap B & & b\cap A
\end{tikzcd}$$

□