18 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir Abschnitt §19 beginnen; Normalreihen einführen, Satz 17.5 benutzen um den Verfeinerungssatz von Schreier sowie den Satz von Jordan-Hölder zu beweisen.

§19: Einfache und auflösbare Gruppen

Definition 18.1. Sei G eine Gruppe.

1. Eine normale Teilgruppe $N \trianglelefteq G$ heißt auch *Normalteiler* von G. Wir schreiben auch $G \trianglerighteq N$ dafür.

2. G ist *einfach* falls G nicht-trivial ist (i.e. $G \neq 1$) und 1 und G die einzige Normalteiler von G sind.

Proposition 18.2. Eine nicht-triviale abelsche Gruppe G ist genau dann einfach wenn $G \simeq \mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl p (i.e. G ist zyklisch von primer Ordnung p).

Beweis.

1. Sei G eine abelsche Gruppe. Dann ist jede Teilgruppe N von G normal (weil die Bedingung $(*)$ in Proposition 15.8 stets für N erfüllt ist, wenn G abelsch ist). G ist also genau dann einfach wenn ihre einzige Teilgruppen 1 und G sind. (Insbesondere ist $\mathbb{Z}_p$ einfach, wegen Lagrange's Satz).

2. Sei nun G einfach. Aus 1. folgt, dass G von jedem nicht-trivialen Element erzeugt ist, also G ist zyklisch. Wenn G zyklisch und unendlich ist, und x ein Erzeuger von G, dann ist z.B. x^2 kein Erzeuger von G (s. Proposition 14.11). Es folgt: G ist endlich und zyklisch und jedes Element $x \neq 1$ erzeugt G.

   Sei nun $x \neq 1$ ein Erzeuger von G, $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl die $|x|$ teilt. Dann ist $|x^p| < |x|$ (s. Proposition 14.11) und daher ist x^p kein Erzeuger, also ist $x^p = 1$. Daraus folgt $|G| = p$.

□

Definition 18.3. Sei G eine Gruppe.

1. Eine Kette von Teilgruppen

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_s = G$$

   heißt *Normalreihe* falls $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ für alle $i = 0, \cdots, s$ gilt.

2. Die Quotienten G_{i+1}/G_i für $i = 0, \ldots, s-1$ heißen *Faktorgruppen*, oder die *Faktoren* oder die *Quotienten* der Normalreihe.

3. Eine Normalreihe heißt *Kompositionsreihe* falls alle Faktorgruppen einfach sind.

4. In diesem Fall heißen die Faktorgruppen *Kompositionsfaktoren* von G.

5. Eine Normalreihe
$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_s = G$$
heißt *Verfeinerung* einer anderen Normalreihe
$$1 = H_0 \leq H_2 \leq \ldots \leq H_r = G$$
falls $H_0, \ldots, H_r$ eine Teilkette von $G_0, \ldots, G_s$ ist.

Beispiel: Die Gruppe A_4 ist normal in S_4, weil $[S_4 : A_4] = 2$ (s. ÜB). Im ÜB wird ferner gezeigt, dass die Teilgruppe (die *kleinsche Vierergruppe*)

$$V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

ein Normalteiler von A_4 ist. Somit ist

$$\{1\} \trianglelefteq V \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$$

eine Normalreihe für S_4.

Definition 18.4. Zwei Normalreihen heißen *äquivalent* falls es eine Bijektion zwischen ihren Faktorgruppen gibt, und entsprechende Faktorgruppen isomorph sind. Das heißt zwei Reihen
$H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_i \trianglelefteq H_{i+1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G$
und $K_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_j \trianglelefteq K_{j+1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G$
sind äquivalent, wenn es eine Bijektion $i \to j$ gibt, so dass die korrespondierenden Faktoren isomorph sind: $H_{i+1}/H_i \simeq K_{j+1}/K_j$.

Beispiel: Betrachte die folgende Kompositionsreihen für $\mathbb{Z}_{30}$:

$$\mathbb{Z}_{30} \geq \langle 5 \rangle \geq \langle 10 \rangle \geq \{0\}$$
$$\mathbb{Z}_{30} \geq \langle 3 \rangle \geq \langle 6 \rangle \geq \{0\}.$$

Die Kompositionsfaktoren der ersten Reihe sind $\mathbb{Z}_{30}/\langle 5 \rangle \simeq \mathbb{Z}_5$, $\langle 5 \rangle/\langle 10 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ und $\langle 10 \rangle/\langle 0 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$.
Die Kompositionsfaktoren der ersten Reihe sind $\mathbb{Z}_{30}/\langle 3 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$, $\langle 3 \rangle/\langle 6 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ und $\langle 6 \rangle/\langle 0 \rangle \simeq \mathbb{Z}_5$.
Daher sind die zwei Kompositionsreihen äquivalent.

Satz 18.5 (Verfeinerungssatz von Schreier)**.** Zwei Normalreihen einer Gruppe G haben äquivalente Verfeinerungen.

Beweis. Seien

$$(1) \qquad 1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_s = G$$

und

$$(2) \qquad 1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_r = G$$

Normalreihen. Sei $G_{i,j} := G_i(G_{i+1} \cap H_j)$ für $0 \leq j \leq r$. Dann

$$G_{i,0} = G_i\{1\} = G_i \quad \text{und} \quad G_{i,r} = G_i(G_{i+1} \cap G) = G_{i+1}.$$

(also haben wir r weitere Glieder zwischen G_i und G_{i+1} eingefügt).
Da $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ und $H_j \trianglelefteq H_{j+1}$, aus dem Lemma von Zassenhaus (mit $a = G_i$, $A = G_{i+1}$, $b = H_j$ und $B = H_{j+1}$) folgt

$$G_{i,j} = G_i(G_{i+1} \cap H_j) \trianglelefteq G_i(G_{i+1} \cap H_{j+1}) = G_{i,j+1}.$$

Somit ist die folgende Normalreihe eine Verfeinerung von (1):

$$\{1\} \trianglelefteq G_{0,0} \trianglelefteq G_{0,1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_{0,r} = G_{1,0} \trianglelefteq G_{1,1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_{s-1,r} = G_s = G.$$

Sei nun $H_{i,j} := H_i(H_{i+1} \cap G_j)$ für $0 \leq j \leq s$. Ähnlich wie oben, ist

$$\{1\} \trianglelefteq H_{0,0} \trianglelefteq H_{0,1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_{0,s} = H_{1,0} \trianglelefteq H_{1,1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_{r-1,s} = H_r = G.$$

eine Verfeinerung von (2). Nun, aus dem Lemma von Zassenhaus (mit $a = G_i$, $A = G_{i+1}$, $b = H_j$ und $B = H_{j+1}$) folgt

$$\frac{G_i(G_{i+1} \cap H_{j+1})}{G_i(G_{i+1} \cap H_j)} \simeq \frac{H_j(H_{j+1} \cap G_{i+1})}{H_j(H_{j+1} \cap G_i)}$$

das heißt:

$$G_{i,j+1}/G_{i,j} \simeq H_{j,i+1}/H_{j,i}.$$

□

Satz 18.6 (Satz von Jordan-Hölder)**.** Sei G eine endliche Gruppe mit $G \neq 1$. Dann gelten

1. G hat eine Kompositionsreihe
2. alle Kompositionsreihen von G sind äquivalent.

Beweis.

1. Wenn G einfach ist, dann ist $\{1\} \trianglelefteq G$ bereits eine Kompositionsreihe.

   Sei nun G nicht einfach. Da G endlich ist, hat sie einen maximalen echten Normalteiler N. Dann ist G/N einfach, nach dem Korrespondenzsatz 17.4. Nach Induktion auf $|G|$ hat G eine Kompositionsreihe. ÜA.

2. Nach dem Korrespondenzsatz 17.4 haben Kompositionsreihen keine echte Verfeinerungen; wenn $G_i \trianglelefteq N \trianglelefteq G_{i+1}$ dann $N/G_i \trianglelefteq G_{i+1}/G_i$ und wenn G_{i+1}/G_i einfach ist, dann gilt $N = G_i$ oder $N = G_{i+1}$. Nun, nach dem Verfeinerungssatz von Schreier haben zwei beliebige Kompositionsreihen äquivalente Verfeinerungen. Somit sind zwei beliebige Kompositionsreihen bereits äquivalent.

□

Definition 18.7.
G heißt *auflösbar*, wenn es eine *Normalreihe mit abelschen Faktoren hat.*

Bemerkung 18.8.
Jede abelsche Gruppe ist trivialerweise auflösbar. Betrachte $G \triangleright \{1\}$.

Erinnerung (s. LA II, Kapitel II, § 6; Skripte 6 und 7.) Sei $n \geq 3$, dann ist

1. $|S_n/A_n| = 2$
2. S_n ist nicht abelsch
3. A_n ist nicht abelsch für $n > 3$
   (Begründung: (123) und (234) kommutieren nicht!)

Beispiel 18.9.
S_n ist auflösbar für $n \leq 4$: S_1 und S_2 sind abelsch also auflösbar. Wir betrachten nun:

1. $S_3 \trianglerighteq A_3 \trianglerighteq \{1\}$

   $|\ S_3/A_3\ | = 2 \qquad |\ A_3/\{1\}\ | = 3$: Diese zwei Gruppen haben als Ordnung eine Primzahl. Es folgt aus Lagrange, dass die Gruppen zyklisch sind, also abelsch.

2. $S_4 \trianglerighteq A_4 \trianglerighteq V \trianglerighteq W \trianglerighteq \{1\}$, wobei V die kleinsche Vierergruppe ist und $W := \{1, (12)(34)\}$.

   $|\ S_4/A_4\ | = 2 \qquad |\ A_4/V\ | = 3 \qquad |\ V/W\ | = 2.$

   Die Faktorgruppen sind also $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_3$.