19 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir auflösbare Gruppen weiter untersuchen, und eine Charakterisierung erzielen in Satz 19.6. Dafür werden wir neue Definitionen und Begriffe (z.B. iterierte Kommutatoren) benötigen. Auflösbare Gruppen spielen in Kapitel 4 eine wesentliche Rolle.

Sei $G \neq \{1\}$ stets eine Gruppe.

Definition 19.1.

1. Für $g, h \in G$ definiere $(g,h) := g^{-1}h^{-1}gh \in G$; (g,h) heißt *Kommutator* von g und h.
2. $G' := (G,G)$ ist die *Kommutatorgruppe* von G und ist die Untergruppe, die durch
$$S := \{(g,h); g, h \in G\}$$
erzeugt wird.
3. Wir definieren die iterierte Kommutatoren per Induktion über $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$:
$G'' := (G')'$, $G^{(k)} := (G^{(k-1)})'$.

Bemerkung 19.2.

1. G ist abelsch genau dann, wenn $(G,G) = \{1\}$.
2. $gh = hg(g,h)$
3. $(g,h) = (h,g)^{-1}$, also ist $< S >= \{s_1 \cdots s_n \mid n \in \mathbb{N};\ s_i \in S\}$.
4. Wenn $H \leq G$, dann ist $H^{(l)} \leq G^{(l)}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Beweis: ÜA.

Wir werden nun die iterierte Kommutatoren genauer untersuchen, und sie für unsere Charakterisierung für auflösbare Gruppen ausnutzen.

Proposition 19.3.
Seien G, K Gruppen und $\eta : G \to K$ ein Homomorphismus. Es gelten

1. $\eta(g,h) = (\eta(g), \eta(h))$
2. $\eta(G') \subseteq K'$
3. Wenn η surjektiv ist, gilt ferner: $\eta(G') = K'$
4. Insbesondere für einen beliebigen Homomorphismus η gilt: $\eta(G') = \eta(G)'$ und
5. Allgemeiner gilt $\eta(G^{(k)}) = \eta(G)^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Beweis:

1. Wir berechnen: $\eta(g,h) = \eta(g^{-1}h^{-1}gh) = \eta(g)^{-1}\eta(h)^{-1}\eta(g)\eta(h) = (\eta(g),\eta(h))$.
2. Aus 1. folgt unmittelbar $\eta(G') \subseteq K'$.
3. Wenn η surjektiv ist, folgt aus 1. dass für alle $x,y \in K : (x,y) \in \eta(G')$. Es folgt also auch $\eta(G') \supseteq K'$, und damit ist die Gleichheit bewiesen.
4. Klar, da $\eta : G \to \eta(G)$ surjektiv ist.
5. Für $k = 1$ gilt die Behauptung wie in 4.

   Nun betrachte $\eta : G' \to K$ und 4. nochmal angewendet ergibt:
   $$\begin{array}{rcl} \eta((G')') & = & \eta(G')' \\ \text{i.e.} \quad \eta(G'') & = & (\eta(G)')' = \eta(G)'' . \end{array}$$
   (Usw. per Induktion fortsetzen, ÜA). □

Proposition 19.4.
Wenn $K \trianglelefteq G$, dann ist $K' \trianglelefteq G$. Insbesondere ist $G' \trianglelefteq G$.

Beweis:
Sei $a \in G$ fest und betrachte die Abbildung $\eta_a : K \to K,\ k \mapsto aka^{-1}$.
Da K ein Normalteiler ist, ist η_a wohldefiniert. Außerdem ist η_a ein Homomorphismus (ÜA).
Aus Proposition 19.3 folgt: $\eta_a(K') \subseteq K'$ für alle $a \in G$, i.e. $K' \trianglelefteq G$. □

Wir erhalten also eine Kette:
$$G \trianglerighteq G' \trianglerighteq G'' \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G^{(k)} \trianglerighteq G^{(k+1)} \trianglerighteq \cdots .$$

Für den Beweis von Satz 19.6 brauchen wir noch:

Lemma 19.5.
Sei $K \trianglelefteq G$. Es gilt G/K ist abelsch $\Leftrightarrow K \geq G'$. Insbesondere ist G/G' abelsch.
(In der Tat ist G' ist die kleinste normale Untergruppe mit dieser Eigenschaft).
Allgemeiner gilt: $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ ist abelsch für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Aus Bemerkung 19.2 folgt: G/K ist abelsch $\Leftrightarrow (G/K)' = \{1\} \Leftrightarrow (gK,hK) = 1$ für alle $g,h \in G$.
Aber $(gK,hK) = (gK)^{-1}(hK)^{-1}gKhK = (g^{-1}h^{-1}gh)K = (g,h)K$. Also ist G/K abelsch $\Leftrightarrow$ $(g,h)K = K$ für alle $g,h \in G \Leftrightarrow (g,h) \in K$ für alle $g,h \in G \Leftrightarrow G' \leq K$.
Die letzte Aussage folgt per Induktion nach $k \in \mathbb{N}$. □

Satz 19.6.
G ist auflösbar $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit $G^{(k)} = 1$.

Beweis:
"$\Leftarrow$" Folgt unmittelbar aus Lemma 19.5: Die Normalreihe $G \trianglerighteq G' \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G^{(k)} = 1$ hat abelsche Faktoren.

"$\Rightarrow$" Sei $G = G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_s \trianglerighteq G_{s+1} = \{1\}$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren G_i/G_{i+1}.

Lemma 19.5 $\Rightarrow G_{i+1} \supseteq G_i'$ für alle i.

Wir prüfen per Induktion dass $G_i \supseteq G^{(i)}$ für alle i:

- für $i = 1$ gilt $G = G_1 \supseteq G'$ $\checkmark$
- Induktionsannahme für k $\checkmark$
- Induktionsschritt für $k+1 : G_{k+1} \supseteq (G_k)' \supseteq (G^{(k)})' = G^{(k+1)}$

Schließlich, da $G_{s+1} = \{1\}$ folgt insbesondere $G^{(s+1)} = \{1\}$ □

Satz 19.7.
Sei G auflösbar.

(1) Sei $H \leq G$. Dann ist H auflösbar.

(2) Sei $\eta : G \twoheadrightarrow H$ ein surjektiver Homomorphismus, dann ist H auflösbar.

(3) Sei G eine beliebige Gruppe und $K \trianglelefteq G$, so dass K und G/K auflösbar sind, dann ist G auch auflösbar.

Beweis: Für den Beweis, benutzen wir stillschweigend Proposition 19.3 und Satz 19.6:

(1) $H \leq G \Rightarrow H^{(i)} \leq G^{(i)}$, also $G^{(k)} = \{1\} \Rightarrow H^{(k)} = \{1\}$.

(2) $\eta(G^{(i)}) = \eta(G)^{(i)}$. Also $G^{(k)} = \{1\} \Rightarrow \eta(G)^{(k)} = \{1\}$. Also $H^{(k)} = \{1\}$.

(3) Sei $\pi : G \twoheadrightarrow G/K$ die kanonische Projektion. Es gilt $\pi(G^{(i)}) = (G/K)^{(i)}$.

Nun G/K auflösbar $\Rightarrow \exists k$ mit $\pi(G^{(k)}) = (G/K)^{(k)} = \{1\}$. Also: für alle $x \in G^{(k)}$ gilt $xK = K$. Es folgt: für alle $x \in G^{(k)}$ gilt $x \in K$, i.e. $G^{(k)} \subseteq K$.

Nun ist aber auch K auflösbar, also existiert ℓ mit $K^{(\ell)} = \{1\}$. Wir berechnen: $G^{(k+\ell)} = (G^{(k)})^{\ell} \subseteq K^{(\ell)} = \{1\}$. □