20 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir eine Charakterisierung für endliche auflösbare Gruppen beweisen. Wir werden ferner (ergänzend zu Beispiel 18.9) die Gruppen A_n und S_n für $n \geq 5$ untersuchen, damit werden wir Abschnitt §19 beenden. Im Abschnitt §20 werden wir die Sylow Sätze aussagen, und die notwendige Begriffe und Werkzeug für deren Beweise einführen.

Sei $G \neq \{1\}$ stets eine Gruppe.

Bemerkung 20.1.
G ist auflösbar und einfach $\Rightarrow$ G ist abelsch (weil $G \trianglerighteq \{1\}$ die einzig mögliche Normalreihe ist).

Satz 20.2.
Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist G auflösbar $\Leftrightarrow$ jeder (nicht-trivialer) Kompositionsfaktor einer Kompositionsreihe ist zyklisch mit Primordnung.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei G auflösbar; und $G = G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{s+1} = \{1\}$ eine Kompositionsreihe. Per Definition ist G_i/G_{i+1} einfach, für alle i. Außerdem ist G_i/G_{i+1} auch auflösbar, für alle i (s. Satz 19. 7). Es folgt: G_i/G_{i+1} ist abelsch, für alle i (s. Bemerkung 20.1), also entweder trivial oder zyklisch mit Primordnung (s. Proposition 18.2).

"$\Leftarrow$" Da G endlich ist, existiert wegen Jordan Hölder eine Kompositionsreihe

$$(*) \qquad G = G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{s+1} = \{1\}$$

Per Annahme sind die (nicht-triviale) G_i/G_{i+1} zyklisch mit Primordnung. Dann ist insbesondere G_i/G_{i+1} abelsch und damit ist die Reihe $(*)$ sogar eine auflösbare Reihe. $\square$.

Satz 20.3.
A_n ist einfach für $n \geq 5$.

Beweis:
Aus Lineare Algebra II, ÜB5 Aufgabe 5.3 (b) wissen wir dass A_n von 3-Zykeln erzeugt ist, für $n \geq 3$. Sei $K \neq \{1\}, K \trianglelefteq A_n$. Zu zeigen: $K = A_n$.

Behauptung 1: Wenn K ein 3-Zykel enthält, dann enthält K alle 3-Zykeln.

Beweis: Sei OE $(123) \in K$ und (ijk) beliebig. Betrachte γ darunter (OE ist $\gamma \in A_n$ sonst ersetze durch $(lm)\gamma$):

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\cdots \\ i\,j\,k\,l\,m\cdots \end{pmatrix}. \quad \text{Wir berechnen: } \gamma(123)\gamma^{-1} = (ijk) \qquad (*)$$

Da K normal ist folgt nun wegen $(*)$ dass $(ijk) \in K$. $\square$

Behauptung 2: K enthält ein 3-Zykel.

Beweis: • Sei $\alpha \in K$; $\alpha \neq 1$. Wähle α mit maximaler Anzahl von Fixpunkten. Bemerke dass α keine Transposition ist. Wir zeigen: α ist ein 3-Zykel. Sonst schreibe:

(a) $\alpha = (123\cdots)\cdots$

oder

(b) $\alpha = (12)(34)\cdots$

als Produkt disjunkter Zykeln.

• Beobachte, dass im Fall (a) α noch zwei Zahlen bewegen muss (ohne Einschränkung 4, 5), sonst ist $\alpha = (123k)$ eine ungerade Permutation - Widerspruch.

• Setze $\beta := (345)$ und $\alpha_1 := \beta\alpha\beta^{-1}$. Dann ist $\alpha_1 \in K$, weil $\alpha \in K$ und $K \trianglelefteq A_n$.

Direktes Rechnen zeigt:
$\alpha_1 = (124\cdots)\cdots$ im Fall (a) und $\alpha_1 = (12)(45)\cdots$ im Fall (b).

Auf jeden Fall ist $\alpha_1 \neq \alpha$ und damit $\alpha_2 := \alpha_1\alpha^{-1} \neq 1$ und $\alpha_2 \in K$.

Nun ist jede $\ell > 5$ durch β fixiert. Beobachte, dass falls ℓ auch durch α fixiert ist, ℓ auch durch α_2 fixiert ist. Also sind die Fixpunkte von α und α_2 die größer als 5 sind, identisch.

Direktes Rechnen im Fall (a) zeigt $\alpha_2(2) = 2$ und außerdem bewegt α in diesem Fall $1, 2, 3, 4, 5$ (wie oben beobachtet). Also hat α_2 einen extra Fixpunkt (nämlich 2). Da $\alpha_2 \in K$ ist es ein Widerspruch.

Direktes Rechnen im Fall (b) zeigt $\alpha_2(1) = 1$ und $\alpha_2(2) = 2$ - Widerspruch. □

Korollar 20.4.
S_n ist **nicht** auflösbar für $n \geq 5$.

Beweis:
Sonst wäre wegen Satz 19.7 auch A_n auflösbar. Da aber A_n einfach ist folgt wegen Bemerkung 20.1 dass A_n abelsch ist - Widerspruch (s. Erinnerung, S. 3 Skript 18). □

§20: Die Sylow Sätze.

Unser nächstes Ziel ist es, die Sylow Sätze zu beweisen. Diese sind Sonderfälle, für die die Umkehrung von Lagrange gilt. Die Sylow Sätze werden wir für die Galoistheorie in Kapitel 4 benötigen.

Sei G stets eine endliche Gruppe.

Sylow 1:

Sei p Primzahl und $k \in \mathbb{N}$, so dass $p^k \mid |G|$, dann hat G eine Teilgruppe H der Ordnung p^k.

Definition 20.5.
Eine solche Teilgruppe H mit $H = p^m$, wobei m maximal ist, heißt eine *Sylow-p-Untergruppe*.

Sylow 2:

1. Sylow-p-Untergruppen H_1 und H_2 sind zueinander konjugiert, das heißt es existiert $a \in G$ mit $H_2 = aH_1a^{-1}$.

2. Die Anzahl der Sylow-p-Untergruppen ist ein Divisor von $[G : H]$ für eine (jede) Sylow-p-Untergruppe H und ist $\equiv 1 \mod p$.

3. Jede Untergruppe der Ordnung p^k ist enthalten in einer Sylow-p-Untergruppe.

Für die Beweise der Sylow-Sätze brauchen wir Gruppenaktionen:

Definition 20.6.
Sei G eine Gruppe und $S \neq \varnothing$ eine Menge. Eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G \times S & \to & S \\ (g,x) & \mapsto & gx \end{array}$$

so dass

(i) $1x = x$ für alle $x \in S$

(ii) $g_1g_2x = g_1(g_2x)$ für alle $x \in S$ und für alle $g_1, g_2 \in G$

heißt *Gruppenaktion*. Wir sagen G *operiert auf* S.

Definition 20.7.
Angenommen G operiert auf S und S'. Die Aktionen heißen *äquivalent*, wenn es eine Bijektion

$$\nu : S \to S'$$

gibt so dass

$$\nu(gx) = g\nu(x)$$

für alle $g \in G$ und $x \in S$.