21 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir Gruppenaktionen genauer untersuchen, einige wichtige Beispiele und Begriffe dazu lernen, und eine Charakterisierung von transitiven Aktionen beweisen in Satz 21.12. Der Satz ergibt mehrere Korollare, u.a. die wichtige Bahngleichung in Skript 22.

Seien stets $S \neq \varnothing$ eine Menge, G eine Gruppe.
Notation: $Sym\ S$ bezeichnet die Gruppe der Permutationen von S.

Definition 21.1.
$H \leq Sym\ S$ heißt Permutationsgruppe.

Proposition 21.2. Sei G eine Gruppe. Angenommen G operiert auf S. Sei $g \in G$.

1. Definiere die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} T(g): & S & \longrightarrow & S \\ & x & \mapsto & gx \end{array}$$
Dann ist $T(g) \in Sym\ S$.

2. Die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} T: & G & \longrightarrow & SymS \\ & g & \mapsto & T(g) \end{array}$$
ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis: ÜA. □

Definition 21.3.
Ansatz wie in Proposition 21.2, $\ker T \trianglelefteq G$ heißt der *Kern der Aktion von G auf S*. Die Aktion heißt *effektiv*, wenn $\ker T = \{1\}$.

Bemerkung 21.4.

1. G operiert auf S und $H \leq G \Rightarrow H$ operiert auf S (durch Einschränkung).
2. G operiert auf S und $\varnothing \neq \mathcal{O} \subseteq S \Rightarrow G$ operiert auf $\mathcal{O}$
(wann immer die Einschränkung wohldefiniert ist.)

Beweis: (ÜA) □

Beispiel 21.5 (samt Definitionen).

(i) Nehme $S = G$. Definiere die effektive Aktion "*linke Multiplikation*" μ_L :
$(g, x) \mapsto \underbrace{gx}_{\text{Produkt in } G}$, für alle $g, x \in G$.

(ii) Dual dazu μ_R: "*rechte Multiplikation*".

(iii) Nehme $S = G$. Definiere die Aktion "*Konjugation*" κ_j:
$(g, x) \mapsto gxg^{-1}$, für alle $g, x \in G$.

Der Kern dieser Aktion ist die normale Untergruppe $C_G \trianglelefteq G$ und heißt *Zentrum von G*:

$$\begin{aligned} C_G &= \{g \mid \ \forall x \in G : gxg^{-1} = x\} \\ &= \{g \mid \ \forall x \in G : gx = xg\} \end{aligned}$$

Satz 21.6. (Satz von Cayley)
Jede Gruppe ist isomorph zu einer Permutationsgruppe.

Beweis:
Setze $S = G$, G operiert auf S mit μ_L. Betrachte den Gruppenhomomorphismus T wie in Proposition 21.2 : $\begin{array}{lccc} T: & G & \longrightarrow & Sym\ G \\ & g & \mapsto & T(g) \end{array}$.
Dann ist offensichtlich $\ker T = \{1\}$. Also $G \simeq T(G) \leq Sym\ G$. □

Aktionen induzieren Äquivalenzrelation. Wir nehmen an: G operiert auf S.

1. Seien $x, y \in S$. Setze $x \underset{G}{\sim} y$, wenn es ein $g \in G$ gibt, s.d. $y = gx$.
   $\underset{G}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf S.
2. $[x] := Gx := \{gx \mid g \in G\}$ heißt die *Orbit* oder *Bahn von x* in S.
3. Es folgt: $S = \bigsqcup_{x \in S} Gx$.

Beispiel 21.7 (samt Definitionen).

(iv) Sei $H \leq G$, setze $S = G$. Dann operiert H auf G durch μ_L (s. Bemerkung 21.4). Wir berechnen für $x \in G$:

$$[x] = \{hx \mid h \in H\} = Hx \, ,$$

also die rechte Nebenklasse von x bezüglich H.

(v) Analog für μ_R . Hier bekommen wir $[x] = xH$, die linke Nebenklasse von x bezüglich H.

(vi) Für die Aktion κ_j , und $x \in G$ ist $[x] = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ die *Konjukationsklasse* von x.

Proposition 21.8.
(*i*) Die Konjugationsklasse von x ist $\{x\}$ genau dann, wenn $x \in C_G$.

(*ii*) Also ist das Zentrum von G die Vereinigung solcher Konjugationsklassen.

Beweis: ÜA

□

Wir nehmen an: G operiert auf S.

Definition 21.9.
1. *G operiert transitiv auf S*, oder *die Aktion von G auf S ist transitiv* wenn es nur eine Bahn gibt, das heißt für alle $x, y \in S : x \underset{G}{\sim} y$.
2. Sei $x \in S$, der *Stabilisator von x in G* ist die Untergruppe von G

$$Stab_x := \{g \in G \ ; \ gx = x \, .\}$$

3. Für die Aktion κ_j von G auf G und $x \in G$ heißt

$$Stab_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = C(x) = \{g \in G \mid gx = xg\} ,$$

der *Zentralisator von x in G.*

Bemerkung 21.10.

(i) Wir nehmen an: G operiert auf S. Seien $x, y \in S$ und $g \in G$. Es gilt:

$$y = gx \Rightarrow Stab_x = g^{-1}(Stab_y)g .$$

(ii) Es folgt: wenn G auf S transitiv operiert, dann gilt:

$$\forall x, y \in S \exists g \in G : Stab_y = g(Stab_x)g^{-1} .$$

Beweis: ÜA □

Beispiel 21.11. [Transitive Aktion:]
Sei $H \leq G$ und setze $\overline{G} := \{xH \mid x \in G\}$ die menge der linken Nebenklassen von H in G. Dann operiert G auf $\overline{G}$ durch linke Multiplikation: $g(xH) := (gx)H$. Die Aktion ist transitiv: seien xH und $yH \in \overline{G}$, setze $g = yx^{-1}$. Dann ist $g(xH) = (gx)H = (yx^{-1}x)H = yH$.

Wir zeigen nun, dass bis auf Äquivalenz von Aktionen, alle transitive Aktionen von G auf eine Menge $S \neq \varnothing$ diese Gestalt haben:

Satz 21.12.
Wir nehmen an dass G transitiv auf S operiert. Sei $s \in S$ fest und setze $H := Stab_s$. Dann ist die angegebene transitive Aktion von G auf S äquivalent zur Aktion von G auf $\overline{G} := \{xH \mid x \in G\}$ durch linke Multiplikation.

Beweis:
Definierte $\nu : \overline{G} \to S$ mit $\nu(xH) := xs$. Laut Definition 20.7 müssen wir Folgendes prüfen:

- ν ist wohldefiniert weil $xH = yH$ gdw $y^{-1}x \in H$ gdw $(y^{-1}x)s = s$ gdw $xs = ys$ (*)
- Die Aktion ist transitiv $\Rightarrow \nu$ ist surjektiv.
- ν ist injektiv (auch wegen (*)).
- Wir berechnen: $\nu(g(xH)) = \nu((gx)H) = (gx)s = g(xs) = g\nu(xH)$.

□

Korollar 21.13.
Es sei G eine endliche Gruppe und $S \neq \varnothing$ eine Menge so dass G auf S transitiv operiert. Dann ist $|S| = [G : Stab_s]$ für ein (jedes) $s \in S$. Insbesondere ist S endlich und $|S| \mid |G|$.

Beweis:
Es folgt nun aus Satz 21.12 und Satz 16.2. □