22 Script zur Vorlesung: Algebra 1 (WiSe2020-2021)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir die Bahn Gleichung und die Sylow Sätze beweisen. Damit beenden wir Kapitel 3.

Seien $S \neq \emptyset$ eine Menge, G eine Gruppe, so dass G auf S operiert.

Wir wollen nun Korollar 21.13 für eine beliebige Aktion verallgemeinern:

Korollar 22.1. [**Bahngleichung**]
Sei S endlich; wähle ein Vertretersystem $\{x_1, \ldots, x_r\}$ der Bahnen. Es gilt

$$|S| = \sum_{i=1}^{r} [G : Stab_{x_i}] \,.$$

Beweis:
Seien $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r$ alle Bahnen. Es ist leicht zu sehen (s. Bemerkung 21.4), dass die Aktion von G auf $\mathcal{O}_i$ transitiv ist für jedes $i = 1, \ldots, r$. Es folgt aus Korollar 21.13 dass $|\mathcal{O}_i| = [G : Stab_{x_i}]$. Nun ist $S = \bigsqcup_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i$, also $|S| = \sum_{i=1}^{r} |\mathcal{O}_i|$. □

Korollar 22.2. [**Klassengleichung I**]
Sei G endlich; wähle ein Vertretersystem $\{x_1, \ldots, x_k\}$ der Konjugationsklassen von G. Es gilt

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} [G : C(x_i)] \,.$$

Beweis:
G operiert auf G durch die Konjugation κ_j und $Stab_{x_i} = C(x_i)$ per Definition 21.9. Wir können Korollar 22.1 also direkt anwenden. □

Korollar 22.3. [**Klassengleichung II**]
Sei G endlich; wähle ein Vertretersystem $\{y_1, \ldots, y_\ell\}$ für die Konjugationsklassen in $G \backslash C_G$. Es gilt:

$$|G| = |C_G| + \sum_{i=1}^{\ell} [G : C(y_i)] \qquad (*)$$

Beweis:
Die Konjugationsklasse von x ist $\{x\}$ gdw $x \in C_G$ genau dann, wenn $C(x) = G \quad (**)$
(s. Proposition 21.8). In Korollar 22.2 wird also in der Formel $1 = [G : G] = [G : C(x_i)]$ so oft summiert wie es Elemente in C_G gibt. Also erhalten wir $|C_G|$ als ersten Summand. □

Korollar 22.4.
Sei G endlich, $|G| = p^k, p$ ist Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $C_G \neq \{1\}$.

Beweis: Siehe ÜB.

Proposition 22.5. Sei G eine endliche abelsche Gruppe, $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $p \mid |G|$. Dann existiert ein $x \in G$ mit $|x| = p$.

Beweis: Siehe ÜB.

Beweise der Sylow-Sätze.

Beweis von Sylow 1:
Sei p Primzahl und $k \in \mathbb{N}$, so dass $p^k \mid |G|$. Wir werden per Induktion nach $|G|$ zeigen dass G eine Teilgruppe H der Ordnung p^k hat.

• $|G| = 2$ ist klar.

• Induktionsannahme: Sylow 1 gilt für alle Gruppen der Ordnung $< |G|$.

• Induktionsschritt: Wir werden Lagrange's Satz, die Klassengleichung II, und Proposition 22.5 (für die abelsche Gruppe $C := C_G$) anwenden.

Zwei Fälle sind zu betrachten:

Fall 1: $p \nmid |C|$. In diesem Fall wegen $(*)$ $\exists j$ mit $p \nmid [G : C(y_j)]$.
Aber $p^k \mid |G|$ und $|G| = [G : C(y_j)] \mid C(y_j) \mid$.
Also $p^k \mid |C(y_j)|$. Wegen $(**)$ ist $|C(y_j)| < |G|$, da $y_j \notin C$ ist.
Induktionsannahme $\Rightarrow C(y_j)$ besitzt eine Teilgruppe der Ordnung p^k. $\square_{Fall1}$

Fall 2: $p \mid |C|$. In diesem Fall liefert Proposition 22.5 ein Element $c \in C$ der Ordnung p.
Nun ist $< c > \trianglelefteq C, |< c >| = p$. Betrachte die Gruppe $G/ < c >$ der Ordnung $\frac{|G|}{|<c>|} = \frac{|G|}{p}$.
Also $p^{k-1} \mid |\frac{G}{<c>}|$. Induktionsannahme $\Rightarrow \exists$ eine Teilgruppe von $G/ < c >$ der Ordnung p^{k-1}.

Nun haben wegen Satz 17.4 die Teilgruppen von $G/ < c >$ die Gestalt $H/ < c >$, wobei $H \leq G$ und $< c > \leq H$. Also existiert $H \leq G$ mit $|\frac{H}{<c>}| = p^{k-1}$. Wir berechnen:
$|H| = |\frac{H}{<c>}| \; | < c > | = p^{k-1}\, p = p^k$. $\square_{Fall2}$ $\square_{Sylow1}$

Wir wollen nun Sylow 2 beweisen.

Bemerkung 22.6. Sei $H \leq G$ und $g \in G$. Dann ist $gHg^{-1} \leq G$. G operiert also durch Konjugation auf $\Gamma :=$ die Menge der Teilgruppen von G. Wir müssen diese Aktion besser verstehen. Für $H \in \Gamma$ berechnen wir:

(i) $Stab_H = \{g \in G\, ;\, gHg^{-1} = H\}$. Somit erkennen wir dass $Stab_H = N_G(H)$ der Normalisator von H in G (s. Definition 16.8). Zur Erleichterung der Notation schreiben wir hier $N(H)$ anstatt $N_G(H)$. Wir erinnern dass $H \trianglelefteq N(H)$ (s. Bemerkung 17.1).

(ii) Die Bahnn von H : $\mathcal{O}_H = \{gHg^{-1}\ ;\ g \in G\}$. Korollar 21.13 liefert $|\mathcal{O}_H| = [G : N(H)]$. Da $[G : H] = [G : N(H)][N(H) : H]$, so ist $|\mathcal{O}_H| \mid [G : H]$.

(iii) Wir betrachten diese Aktion auf die Mengen $\Pi \subseteq \Gamma$ der Sylow-p-Untergruppen von G. Die Aktion auf Π ist wohldefiniert, weil $gHg^{-1} \in \Pi$, wenn $H \in \Pi$. (s. Bemerkung 21.4)

Wir bekommen ein Hilfslemma.

Lemma 22.7. (i) Sei $P \in \Pi, H \leq N(P)$ so dass $|H| = p^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $H \leq P$.

(ii) P ist die einzige Sylow-p-Untergruppe von $N(P)$.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{ll} H \leq N(P) & \text{und} \\ P \trianglelefteq N(P) & \end{array}\right\} \Rightarrow HP \text{ ist Untergruppe und } HP/P \simeq H/(H \cap P)$$

(Isomorphie-Satz 17.2). Also ist HP/P isomorph zu einer Faktorgruppe von H und damit hat sie die Ordnung $|HP| = p^k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$. Da aber P eine Sylow-p-Untergruppe ist, folgt: $HP = P$, so dass $H \leq P$. Damit haben wir (i) bewiesen, (ii) folgt unmittelbar aus (i). □

Beweis von Sylow 2:
Betrachte eine Bahn $\sum$ für die Aktion in Bemerkung 22.6. Sei $P \in \Pi$, dann operiert P auf die Bahn $\sum$ (s. Bemerkung 21.4). Wir bekommen eine Partition von $\sum$ in P-Bahnen (i.e. Äquivalenzklassen bezüglich dieser Aktion von P auf $\sum$).

Fall 1: Sei $P \in \sum$.

- Betrachte die P-Bahn von P. Die ist offensichtlich $\{P\}$ (weil $xPx^{-1} = P$ für alle $x \in P$).
- Wir behaupten, dass $\{P\}$ die einzige P-Bahn der Kardinalität 1 ist:
  Sei $\{P'\}$ eine P-Bahn. Dann gilt $xP'x^{-1} = P'$ für alle $x \in P$, das heißt $P \leq N(P')$ und Lemma 22.7(ii) liefert $P = P'$ (weil P' die einzige Sylow-p-Untergruppe von $N(P')$ ist und P ist eine Sylow-p-Untergruppe von $N(P')$).
- Beachte, dass jede P-Bahn Kardinalität eine Potenz von p hat, da diese Kardinalität die Kardinalität $|P|$ teilen muss (siehe Korollar 21.13). Also ist $|\sum| \equiv 1 \mod p$.

Dieses beweist die zweite Aussage von Sylow 2 (2).

Nun beweisen wir Sylow 2 (1). Wir müssen zeigen, dass $\sum$ die einzige Bahn für die Aktion in Bemerkung 22.6. Sonst gibt es $P \in \Pi$ mit

Fall 2: $P \notin \sum$.
Analog wie Fall 1 sehen wir, dass es überhaupt keine P-Bahnen der Kardinalität 1 gibt (die einzige Möglichkeit, nämlich $\{P\}$ scheidet nun aus, weil $P \notin \sum$ ist). Also ist $|\sum| \equiv 0 \mod p$ - Widerspruch. So $\sum = \Pi$ und damit ist Sylow 2 (1) bewiesen.

Es ist $|\Pi| = [G : N(P)]$ für alle $P \in \Pi$ (Korollar 21.13). Also ist die Anzahl der Sylow-p-Untergruppen ein Divisor (s. Bemerkung 22.6). Das beweist die erste Aussage in Sylow 2 (2).

Nun beweisen wir Sylow 2 (3). Sei $H \leq G, |H| = p^k$. Betrachte die Aktion von H auf Π. Die H-Bahnen haben Kardinalität ein Divisor von $|H|$ (Korollar 21.13), also haben die H-Bahnen Kardinalität eine Potenz von p.
Nun ist aber $|\Pi| \equiv 1 \mod p$, also gibt es eine H-Bahn $\{P\}$ mit nur einem Element, das heißt $H \leq N(P)$ und damit $H \leq P$ (s. Lemma 22.7 (i)). □