Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020/2021

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 1

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Dieses Blatt ist das erste reguläre Übungsblatt für dieses Semester. Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 1 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Sei R stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1.1 (Ringe, Ideale und Äquivalenzrelationen) **[3 + 1 Punkte]**

(a) Sei $I \lhd R$ ein echtes Ideal. Die Relation $\sim$ auf R wird dadurch definiert, dass genau dann $x \sim y$, wenn $x - y \in I$. Zeigen Sie:

   (i) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf R.

   (ii) Die Verknüpfungen $(x+I)+(y+I) := (x+y)+I$ und $(x+I)\cdot(y+I) := (xy)+I$ auf R/I sind wohldefiniert. (Wie im Skript bezeichnet dabei $x+I$ die Äquivalenzklasse $[x]$ von x.)

   (iii) $(R/I, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.

(b) Sei R ein endlicher Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

(Hinweis: Sei $a \in R \setminus \{0\}$ beliebig. Betrachten Sie die Menge $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.)

Lösung:

Aufgabe 1.2 (Eulersche Phi-Funktion) **[3 + 1 Punkte]**

Sei φ die eulersche Phi-Funktion.

(a) Zeigen Sie:

   (i) Für alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

   (ii) Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(a,b) = 1$ gilt $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

   (iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n,\ p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

(b) Geben Sie ein Beispiel für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(ab) \neq \varphi(a)\varphi(b)$ an.

Lösung:

Aufgabe 1.3* (Rechnen mit Idealen) **[2 + 1 + 1 Punkte]**

(a) Seien $I, J \lhd R$. Zeigen Sie:

(i) $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ ist das kleinste Ideal von R, das $I \cup J$ enthält.

(ii) $IJ := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \right\}$ ist ein Ideal von R, welches in $I \cap J$ enthalten ist. Geben Sie ein Beispiel für R, I und J an, sodass $IJ \neq I \cap J$.

(b) Sei $\mathcal{I}$ eine Indexmenge und sei I_i für jedes $i \in \mathcal{I}$ ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} I_i$ auch ein Ideal von R ist.

(c) Finden Sie ein Beispiel für R, I_1 und I_2 mit $I_1, I_2 \lhd R$, sodass $I_1 \cup I_2$ kein Ideal von R ist.

Lösung:

Aufgabe 1.4 (Faktorring) **[1 + 3 Punkte]**

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 1\rangle$ kein Integerring ist.
(Hierbei ist $\langle x^2 - 1\rangle$ das Hauptideal $(x^2 - 1)\mathbb{Q}[x]$ von $\mathbb{Q}[x]$.)

(ii) Wir definieren die Ringoperationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}^2$ koordinatenweise durch

$$(r_1, r_2) + (s_1, s_2) := (r_1 + s_1, r_2 + s_2) \text{ und } (r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) := (r_1 s_1, r_2 s_2)$$

für alle $(r_1, r_2), (s_1, s_2) \in \mathbb{Q}^2$. Zeigen Sie, dass die Ringisomorphie $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 1\rangle \simeq \mathbb{Q}^2$ gilt.
(Sie müssen nicht nachweisen, dass $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ ein Ring ist.)

Lösung:

Abgabe: Bis **Dienstag, 10. November 2020, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor.
Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.