Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020/2021

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 2

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 3 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Sei R stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 2.1 (Radikalideal) **[2 + 2 Punkte]**

Sei $I \lhd R$. Wir definieren induktiv $I^1 := I$ und $I^{n+1} := II^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass I^n ein Ideal von R ist und dass $I^n \subseteq I$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sqrt{I} := \{a \in R \mid a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ ein Ideal von R ist.

Lösung:

Aufgabe 2.2* (Teil- und Faktorringe) **[2 + 2 Punkte]**

Sei $I \lhd R$ und sei $\pi\colon R \to R/I, x \mapsto x + I$ die kanonische Projektion.

(i) Sei $\mathcal{T}$ die Menge der Teilringe von R, die I enthalten, und sei $\mathcal{T}_I$ die Menge der Teilringe von R/I. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{T} &\to \mathcal{T}_I, \\ S &\mapsto \pi(S) \end{aligned}$$

bijektiv und inklusionserhaltend (d.h. $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \pi(S_1) \subseteq \pi(S_2)$) ist.

(ii) Sei $\mathcal{I}$ die Menge der Ideale von R, die I enthalten, und sei $\mathcal{I}_I$ die Menge der Ideale von R/I. Setze $\rho := \psi|_{\mathcal{I}}$. Zeigen Sie, dass $\rho(\mathcal{I}) = \mathcal{I}_I$ ist.

(Damit haben Sie gezeigt, dass ρ eine bijektive Abbildung von $\mathcal{I}$ nach $\mathcal{I}_I$ ist.)

Lösung:

Aufgabe 2.3 (Lemma von Zorn) **[2 + 4 Punkte]**

(a)* Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass jeder nicht endlich-dimensionale K-Vektorraum V auch eine Basis besitzt.

(Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Zorn.)

(b) Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge von R mit $0 \notin S$. Zeigen Sie:

(i) Es existiert ein echtes Ideal $I \lhd R$, welches maximal mit der Eigenschaft $S \cap I = \emptyset$ ist. *(Dies bedeutet nicht, dass I ein maximales Ideal ist. Siehe hierzu Übungsblatt 3.)*

(ii) Jedes solche Ideal aus (i) ist prim.

Lösung:

Aufgabe 2.4 (Chinesischer Reste-Satz) **[1 + 1 + 2 Punkte]**

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben

$$a \equiv b \mod n,$$

falls $a - b \in n\mathbb{Z}$ gilt.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $n_1, \ldots, n_k, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(n_i, n_j) = 1$ für alle $i \neq j$.

(i) Zeigen Sie, dass es $x_0 \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$x_0 \equiv a_i \mod n_i.$$

(ii) Zeigen Sie, dass x_0 aus (i) eindeutig modulo $n_1 n_2 \ldots n_k$ ist, also dass für jedes $y \in \mathbb{Z}$ mit $y \equiv a_i \mod n_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$y \equiv x_0 \mod n_1 n_2 \ldots n_k.$$

(Hinweis: Wenden Sie den Chinesischen Reste-Satz auf geeignete Ideale von $\mathbb{Z}$ an.)

(b) Finden Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, für die

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3, \\ x &\equiv 4 \mod 25 \text{ und} \\ x &\equiv 9 \mod 14 \end{aligned}$$

gelten.

(Hinweis: Finden Sie zunächst ein spezielles $x_0 \in \mathbb{Z}$, das alle drei Bedingungen erfüllt.)

Lösung:

Abgabe: Bis **Dienstag, 17. November 2020, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.