Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020/2021

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 3

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 5 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Sei R stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 3.1 (Ideale im Polynomring) **[4 Punkte]**

Für $f \in \mathbb{R}[x]$ bezeichne f' die formale Ableitung von f. Welche der folgenden Mengen I_k sind Ideale von $\mathbb{R}[x]$?

(i) $I_1 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(2) = 0\}$

(ii) $I_2 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f'(-2) = 0\}$

(iii) $I_3 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(2) = f(3) = 0\}$

(iv) $I_4 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(1) = f'(1) = 0\}$

Finden Sie für die I_k, welche Ideale von $\mathbb{R}[x]$ sind, ein Polynom $f_k \in \mathbb{R}[x]$, das I_k erzeugt.

Lösung:

Aufgabe 3.2 (Maximale Ideale und Primideale) **[1 + 1 + 2 Punkte]**

(a) Sei P ein Primideal von R und setze $S = R \setminus P$.

  (i) Zeigen Sie, dass S eine multiplikative Teilmenge von R mit $0 \notin S$ ist.

  (ii) Sei $I \lhd R$ ein echtes Ideal, welches maximal mit der Eigenschaft $S \cap I = \emptyset$ ist. (Vgl. Aufgabe 2.3 (b).) Zeigen Sie, dass dann schon $I = P$ gilt.

(b) Wir definieren $\mathbb{Z}[x, y] := \mathbb{Z}[x][y]$. Finden Sie ein Primideal $P \neq \{0\}$ von $\mathbb{Z}[x, y]$, das nicht maximal ist.

  (Damit ist das zu P gehörige Ideal $I \lhd \mathbb{Z}[x, y]$ aus (a) nicht maximal. Vgl. Aufgabe 2.3.)

Lösung:

Aufgabe 3.3 (Euklidischer Ring) **[4 Punkte]**

Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] := \left\{n + mi\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{C}$ und den Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}) := \left\{r + si\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}\right\} \subseteq \mathbb{C}$. Wir definieren die Norm $N(r + si\sqrt{2}) := r^2 + 2s^2$ für alle $r, s \in \mathbb{Q}$.

(i) Zeigen Sie, dass N multiplikativ ist, d.h. für alle $a, b \in K$ gilt $N(ab) = N(a)N(b)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $K = \operatorname{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R ist, d.h. für alle $a \in K$ gibt es $b, c \in R$ mit $a = \frac{b}{c}$.

(iii) Zeigen Sie, dass es für alle $a, b \in R$ ein $c \in R$ mit $N(\frac{a}{b} - c) < 1$ gibt.

(iv) Folgern Sie, dass (R, N) ein euklidischer Integritätsbereich ist.

Lösung:

Aufgabe 3.4* (Ideale in der Lokalisierung) **[4 Punkte]**

Sei R ein Integritätsbereich und sei S eine multiplikative Teilmenge von R. Wir identifizieren R mit einem Teilring von $S^{-1}R$ durch die Einbettung $i\colon r \mapsto \frac{r}{1}$. Für jedes Ideal I von R bezeichnet $S^{-1}RI$ das von I erzeugte Ideal in $S^{-1}R$.

(i) Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $S^{-1}R$ von der Form $S^{-1}RI$ ist, wobei I ein Ideal von R ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes Primideal $P \triangleleft R$ mit $P \cap S = \emptyset$ das Ideal $S^{-1}RP$ ein Primideal von $S^{-1}R$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass jedes Primideal von $S^{-1}R$ von der Form $S^{-1}RP$ ist, wobei P ein Primideal von R mit $P \cap S = \emptyset$ ist.

Lösung:

Abgabe: Bis **Dienstag, 24. November 2020, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.