Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020/2021

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 4

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 7 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Für $a \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}[a]$ den Ring $\{p(a) \mid p \in \mathbb{Z}[x]\}$.

Aufgabe 4.1 (Hauptideale) **[2 + 2 Punkte]**

(i) Sei $I \lhd \mathbb{Z}[x]$. Angenommen, es existiert ein normiertes Polynom $f \in I$, sodass für alle $h \in I \backslash \{0\}$ bereits $\deg(f) \leq \deg(h)$ gilt. Zeigen Sie, dass I ein Hauptideal ist.

(ii) Finden Sie ein Ideal von $\mathbb{Z}[x]$, das kein Hauptideal ist.

Lösung:

Aufgabe 4.2 (Lemma von Gauß) **[2 + 2 Punkte]**

(i) Sei $R \neq \{0\}$ ein Integerring und sei $F = \mathrm{Quot}(R)$. Angenommen, es existieren ein normiertes Polynom $p \in R[x]$ und zwei nicht-konstante normierte Polynome $A, B \in F[x]$, sodass $p = AB$ und $A \notin R[x]$. Zeigen Sie, dass R nicht faktoriell ist.

(ii) Folgern Sie aus (i), dass $\mathbb{Z}[2\sqrt{2}]$ nicht faktoriell ist.
(Hinweis: Betrachten Sie $x^2 - 2$.)

Lösung:

Aufgabe 4.3 (Irreduzible Polynome) **[1 + 1 + 2 Punkte]**

(a) Sei K ein Körper und sei $f \in K[x]$ mit $\deg(f) \in \{2, 3\}$. Zeigen Sie, dass f genau dann irreduzibel ist, wenn f keine Nullstelle hat. Zeigen Sie zudem, dass diese Äquivalenz im Allgemeinen für $\deg(f) \geq 4$ nicht gilt.

(b) Erstellen Sie die Liste aller irreduziblen Polynome vom Grad 3 in $\mathbb{F}_2[x]$.

(c) Bestimmen Sie, ob folgende Polynome in $\mathbb{F}_2[x]$ irreduzibel sind. Falls nicht, geben Sie ihre Primfaktorzerlegung an.

(i) $x^4 + x^2 + 1$

(ii) $x^4 + 1$

(iii) $x^4 + x + 1$

Lösung:

Aufgabe 4.4* (Nicht faktorieller Ring) **[2 + 1 + 1 Punkte]**

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ und $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$. Wir setzen $\gamma_n = \mathrm{i}\sqrt{n} \in \mathbb{C}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\gamma_n]^\times = \{1, -1\}$ gilt und dass 2 und γ_n irreduzibel in $\mathbb{Z}[\gamma_n]$ sind.

(Hinweis: Betrachten Sie die multiplikative Norm $N\colon z \mapsto |z|^2$ auf $\mathbb{Z}[\gamma_n]$; vgl. Aufgabe 3.3. Hierbei bezeichnet $|z|$ den Betrag von z.)

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\gamma_6]$ nicht faktoriell ist.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass γ_6 nicht prim in $\mathbb{Z}[\gamma_6]$ ist.)

(iii) Zeigen Sie, dass das Ideal $\langle 2, \gamma_6 \rangle$ in $\mathbb{Z}[\gamma_6]$ kein Hauptideal ist.

Lösung:

Abgabe: Bis **Dienstag, 01. Dezember 2020, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.