Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020/2021

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 5

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 9 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 5.1 (Beweisschritte in Skript 8) **[2 + 1 + 1 Punkte]**

Sei R ein Integritätsbereich.

(a) Sei R faktoriell und sei $r \in R[x] \setminus \{0\}$. Seien ferner $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m \in R[x]$ irreduzibel mit

$$r = p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m.$$

Zeigen Sie, dass $m = n$ gilt und für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ existiert, für das p_i und q_j assoziiert sind.

(Hinweis: Beachten Sie dabei, dass $\mathrm{Quot}(R)[x]$ *faktoriell ist.)*

(b) Sei R faktoriell und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $R[x_1, \ldots, x_n]$ faktoriell ist.

(c) Seien $a, b \in R[x]$ nicht-konstante Polynome, sodass $a(x)b(x) = x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass a und b Monome sind.

Lösung:

Aufgabe 5.2 (Irreduzibilitätskriterien) **[3 + 1 Punkte]**

(a) Zeigen Sie (mit so wenig Rechenaufwand wie möglich), dass folgende Polynome irreduzibel sind:

(i) $x^5 + 21x^4 + 39x^3 - 15x + 15$ in $\mathbb{Z}[x]$

(ii) $x^3 + 5x^2 + 27x + 22$ in $\mathbb{Z}[x]$

(iii) $x^3 + 14x^2 + 7x + 23$ in $\mathbb{Q}[x]$

(iv) $x^9 + 10x^7 + 55x^6 - 100x^2 + 20$ in $\mathbb{Q}[x]$

(v) $4x^3 + 12x^2 + 20$ in $\mathbb{Q}[x]$

(vi) $x^2y^2 + x^3 - x^2 - y + 1$ in $\mathbb{Q}[x, y]$

(Hinweis: Betrachten Sie das Polynom in $\mathbb{Q}[y][x]$*.)*

(b) Sei $f(x) = 4x^2 + 2$. Entscheiden Sie jeweils, ob f in $\mathbb{Z}[x]$ bzw. in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

Lösung:

Aufgabe 5.3 (Primfaktorzerlegung) **[1 + 1 + 2 Punkte]**

(a) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass das Polynom $x^4 - p$ reduzibel in $\mathbb{R}[x]$ aber irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ ist.

(b) Finden Sie die Primfaktorzerlegung von $x^{2n} + 2x^n + 1$ in $\mathbb{R}[x]$ für $n = 2$ und $n = 3$.

(c) Finden Sie die Primfaktorzerlegung von $x^4 + 1$ in $\mathbb{R}[x]$ und in $\mathbb{Q}[x]$.

Lösung:

Aufgabe 5.4* (Quadratische Körpererweiterung) **[1 + 3 Punkte]**
Betrachten Sie erneut den Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ aus Aufgabe 3.3.

(i) Zeigen Sie, dass $1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$ irreduzibel in R ist.

(ii) Sei $f(x) = x^5 + 6x^3 + 9x + 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$. Zeigen Sie, dass f irreduzibel in $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ist.
(Hinweis: Wenden Sie das Lemma von Gauß an.)

Lösung:

Abgabe: Bis **Dienstag, 08. Dezember 2020, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor.
Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.