

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 6

Abgabe von: Mein Name

Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 11 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 6.1 (Einfache algebraische Körpererweiterung)

[1 + 2 + 1 Punkte]

Sei $p(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(i) Zeigen Sie, dass p irreduzibel über \mathbb{Q} ist.

Sei nun θ eine Nullstelle von p in einer Körpererweiterung von \mathbb{Q} .

(ii) Schreiben Sie $(\theta^2 - 1)^{-1}$ und θ^5 als Linearkombination von $1, \theta$ und θ^2 über \mathbb{Q} .

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\theta^2 - 1)$ gilt.

Lösung:

Aufgabe 6.2 (Erweiterungsgrade I)

[2 + 2 Punkte]

Sei L/K eine Körpererweiterung.

(a) Sei $[L : K] = p$ mit $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie: Für jedes $\alpha \in L \setminus K$ gilt $K(\alpha) = L$.

(b) Sei $[L : K] = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $f \in K[x]$ mit $\deg(f) = 3$ ein Polynom, welches eine Nullstelle in L hat. Zeigen Sie, dass f dann bereits eine Nullstelle in K hat.

Lösung:

Aufgabe 6.3 (Minimalpolynome)

[2 + 2 Punkte]

Sei $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$.

(i) Ermitteln Sie die Minimalpolynome $m_{\alpha, \mathbb{Q}}$ und $m_{\alpha, \mathbb{Q}(\sqrt{2})}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ gilt.

Lösung:

Aufgabe 6.4* (Erweiterungsgrade II)

[2 + 2 Punkte]

Sei K ein Körper und sei $p \in K[x]$ irreduzibel. Sei ferner $n = \deg(p)$ und α eine Nullstelle von p in einer Körpererweiterung von K . Zeigen Sie:

- (i) Ist n ungerade, dann gilt $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Folgerung in (i) im Allgemeinen nicht gilt, wenn n gerade ist.

Lösung:

Glühwein | Snacks | Unterhaltung
<https://bbb.uni-konstanz.de/b/tha-mnt-gev>

Weihnachtsfeier

Mathematik und Statistik

Donnerstag
17.12.20
Ab 19:30 Uhr
Online siehe Link
oben

Abgabe: Bis **Dienstag, 15. Dezember 2020, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor.
Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.