Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020/2021

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 7

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 13 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 7.1 (Einfache Erweiterungen) **[2 + 2 Punkte]**
Sei K/F eine Körpererweiterung.

(a) Sei $\alpha \in K$ algebraisch über F. Zeigen Sie, dass

$$F[\alpha] = \{p(\alpha) \mid p \in F[x]\}$$

(also der von α über F erzeugte Teilring von K) ein Teilkörper von K ist. Folgern Sie, dass $F[\alpha] = F(\alpha)$ gilt.

(b) Sei $a \in K$ transzendent über F. Zeigen Sie, dass der Körper $F(a)$ (also der von a über F erzeugte Teilkörper von K) isomorph zu $F(x)$ ist.

Lösung:

Aufgabe 7.2 (Algebraischer Abschluss) **[2 + 1 + 1 Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendliche Kardinalität besitzt.

(b) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Primkörper F. Zeigen Sie, dass $[K : F]$ unendlich ist.

(c) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ unendlich ist.

Lösung:

Aufgabe 7.3 (Frobeniushomomorphismus) **[2 + 2 Punkte]**
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und sei K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) = p$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in K$ die Gleichung $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\sigma_n \colon K \to K, a \mapsto a^{p^n}$ einen Homomorphismus definiert.

(Die Abbildung σ_1 wird als Frobeniushomomorphismus bezeichnet.)

Lösung:

Aufgabe 7.4* (Körperidentifikation) **[2 + 2 Punkte]**

Sei K'/F' eine Körpererweiterung und sei F ein Körper mit $F \cap K' = \emptyset$. Sei ferner $\varphi\colon F \to F'$ ein Ringisomorphismus.

(i) Setze $K = (K' \setminus F') \cup F$ und definiere für $a, b \in K$ die binären Operationen $+_K$ und $\cdot_K$ wie folgt:

$$a +_K b := \begin{cases} a +_{K'} b, & \text{falls } a, b \in K' \text{ und } a +_{K'} b \notin F', \\ \varphi^{-1}(a +_{K'} b), & \text{falls } a, b \in K' \text{ und } a +_{K'} b \in F', \\ a +_{K'} \varphi(b), & \text{falls } a \in K', b \in F, \\ \varphi(a) +_{K'} b, & \text{falls } a \in F, b \in K', \\ a +_F b, & \text{falls } a, b \in F; \end{cases}$$

$$a \cdot_K b := \begin{cases} a \cdot_{K'} b, & \text{falls } a, b \in K' \text{ und } a \cdot_{K'} b \notin F', \\ \varphi^{-1}(a \cdot_{K'} b), & \text{falls } a, b \in K' \text{ und } a \cdot_{K'} b \in F', \\ a \cdot_{K'} \varphi(b), & \text{falls } a \in K', b \in F, \\ \varphi(a) \cdot_{K'} b, & \text{falls } a \in F, b \in K', \\ a \cdot_F b, & \text{falls } a, b \in F. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(K, +_K, \cdot_K)$ eine Körpererweiterung von F ist. Weisen Sie dabei insbesondere die Körperaxiome für K nach.

(ii) Finden Sie einen Ringisomorphismus $\psi\colon K \to K'$ mit $\psi|_F = \varphi$.

Lösung:

Abgabe: Bis **Dienstag, 22. Dezember 2020, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.