Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020/2021

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 8

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 15 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 8.1 (Separabilität) **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie ob folgende Polynome separabel sind:

(i) $x^2 - 6x + 9$ in $\mathbb{Q}[x]$,

(ii) $x^{60} + x^{30} + 1$ in $\mathbb{F}_2[x]$,

(iii) $x^5 + tx + t$ in $\mathbb{F}_5(t)[x]$,

(iv) $x^4 + 6x^3 - 22x^2 + 7x - 15015$ in $\mathbb{Q}[x]$.

Lösung:

Aufgabe 8.2 (Separabilität über perfekten Körpern) **[2 + 2 Punkte]**

Sei F ein perfekter Körper. Zeigen Sie:

(i) Jedes irreduzible Polynom $f \in F[x]$ ist separabel.

(ii) Ein Polynom $f \in F[x]$ mit $\deg f \geq 1$ ist genau dann separabel, wenn die Primfaktorisierung von f in $F[x]$ die folgende Gestalt hat:

$$f = c \prod_{i=1}^{k} p_i,$$

wobei $c \in F^\times$ und $p_i \in F[x]$ normiert und irreduzibel sowie $p_i \neq p_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.

Lösung:

Aufgabe 8.3 (Beweisschritte aus Skript 12) **[2 + 2 Punkte]**

Sei F ein Körper.

(a) Sei I eine beliebige Menge und $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ eine endliche Teilmenge von I. Wir definieren $F[x_j \mid j \in J]$ als den Polynomring $F[x_{j_1}, \dots, x_{j_k}]$, also den Polynomring über F in den Variablen $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$. Weiterhin sei

$$F[x_i \mid i \in I] := \bigcup_{J \subseteq I \text{ endlich}} F[x_j \mid j \in J].$$

Finden Sie geeignete Operationen $+$ und $\cdot$ auf $F[x_i \mid i \in I]$, sodass $(F[x_i \mid i \in I], +, \cdot)$ ein Ring ist, der $F[x_j \mid j \in J]$ für jedes endliche $J \subseteq I$ als Teilring hat.

(Im Hauptsatz von Skript 12 ist der Polynomring $F[\cdots, x_f, \cdots]$ durch $F[x_i \mid i \in I]$ für die Menge $I = F[x]$ gegeben.)

(b) Seien K und L zwei algebraische Abschlüsse von F. Zeigen Sie, dass es einen Ringisomorphismus $\sigma\colon K \to L$ gibt, für den $\sigma(F) = F$ gilt.

Lösung:

Aufgabe 8.4* (Algebraische Zahlen) **[4 Punkte]**

Es bezeichne $\widetilde{\mathbb{Q}}$ den Körper der algebraischen Zahlen und $\widetilde{\mathbb{Q}}^r$ den Körper der reellen algebraischen Zahlen. Zeigen Sie:

(i) $[\widetilde{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] = [\widetilde{\mathbb{Q}}^r : \mathbb{Q}] = \aleph_0$.

(ii) $|\widetilde{\mathbb{Q}}| = |\widetilde{\mathbb{Q}}^r| = \aleph_0$.

(iii) $|\mathbb{C} \setminus \widetilde{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R} \setminus \widetilde{\mathbb{Q}}^r| = 2^{\aleph_0}$.

(Hierbei bezeichnet $\aleph_0$ die Kardinalität von $\mathbb{N}$ und $2^{\aleph_0}$ die Kardinalität von $\mathbb{R}$.)

Lösung:

Abgabe: Bis **Dienstag, 12. Januar 2021, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.