Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020/2021

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 9

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 17 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 9.1 (Ordnung I) **[3 + 1 Punkte]**

Sei G eine Gruppe, sei $x \in G$ und sei $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(a) Zeigen Sie:

(i) Aus $|x| = \infty$ folgt $|x^j| = \infty$.

(ii) Aus $|x| = n < \infty$ folgt $|x^j| = \frac{n}{\mathrm{ggT}(n,j)}$.

(iii) Aus $|x| = n < \infty$ und $j \mid n$ folgt $|x^j| = \frac{n}{|j|}$.

(b) Sei $|x| = \infty$. Zeigen Sie, dass x^j genau dann ein Erzeuger von $\langle x \rangle$ ist, wenn $j \in \{-1, 1\}$.

Lösung:

Aufgabe 9.2 (Zyklische Gruppen und Ordnung II) **[2 + 2 Punkte]**

(a) Sind die folgenden additiven Gruppen zyklisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$,

(ii) $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ mit $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(b) Sei G eine (nicht notwendigerweise abelsche) endliche Gruppe und seien $x, y \in G$. Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe eines Gegenbeispiels jeweils die folgenden Aussagen:

(i) $|xy|$ ist ein Teiler von $\mathrm{kgV}(|x|, |y|)$.

(ii) Falls $xy = yx$, dann ist $|xy|$ ein Teiler von $\mathrm{kgV}(|x|, |y|)$.

(iii) Es gilt $|xy| = \mathrm{kgV}(|x|, |y|)$.

Lösung:

Aufgabe 9.3 (Satz von Lagrange) **[2 + 2 Punkte]**

(i) Zeigen Sie, dass A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt.

(Hinweis: Bemerke, dass solch eine Gruppe einen 3-Zykel enthalten würde.)

(ii) Finden Sie alle Untergruppen von A_4. Welche davon sind normal?

Lösung:

Aufgabe 9.4* (Normale Untergruppen) **[3 + 2 Punkte]**

Sei G eine Gruppe und sei $H \leq G$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent zueinander sind:

(i) $H \trianglelefteq G$.

(ii) $N_G(H) = G$.

(iii) Für alle $g \in G$ gilt $gH = Hg$.

(iv) Die Verknüpfung $(uH, vH) \mapsto (uv)H$ definiert eine Gruppenoperation auf der Menge der linken Nebenklassen von H.

(v) Für alle $g \in G$ und alle $h \in H$ gilt $ghg^{-1} \in H$.

(b) (i) Zeigen Sie, dass $N_G(H)$ eine Teilgruppe von G mit $H \trianglelefteq N_G(H)$ ist.

(ii) Sei $B \leq G$ mit $H \leq B$. Zeigen Sie, dass genau dann $H \trianglelefteq B$ gilt, wenn B eine Teilgruppe von $N_G(H)$ ist.

(Damit ist $N_G(H)$ die größte Teilgruppe von G, in der H normal ist.)

Lösung:

Abgabe: Bis **Dienstag, 19. Januar 2021, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.