Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020/2021

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 10

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 19 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 10.1 (Normalität und Index) **[2 + 2 Punkte]**

Sei G eine Gruppe und sei $H \leq G$.

(a) Setze $N := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Zeigen Sie:

  (i) $N \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq H$.

  (ii) Für jedes $M \trianglelefteq G$ mit $M \leq H$ gilt $M \leq N$.

(b) Setze $n = [G : H]$.

  (i) Angenommen $n = 2$. Zeigen Sie, dass H normal in G ist.

  (ii) Zeigen Sie, dass die Folgerung aus (i) für den Fall $n = 3$ im Allgemeinen nicht gilt.

Lösung:

Aufgabe 10.2 (Diedergruppe) **[1 + 2 + 1 Punkte]**

Sein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Die n-te *Diedergruppe* D_n ist die Symmetriegruppe aller Drehungen und Spiegelungen eines regulären n-Ecks. Das heißt, D_n wird von der Drehung r um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und der Spiegelung s an einer Symmetrieachse des n-Ecks erzeugt. Als Gruppe von Matrizen ist D_n daher die Untergruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen in $\mathbb{R}$ erzeugt von

$$r = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, \ s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $r^n = 1$, $s^2 = 1$ und $srs = r^{-1}$ gelten. (Hierbei steht 1 für die Identitätsmatrix in der Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$.)

(ii) Zeigen Sie, dass jedes Element aus D_n in der Form $r^i s^j$ mit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $j \in \{0, 1\}$ geschrieben werden kann. Folgern Sie hieraus, dass D_n die Ordnung $2n$ hat.

(iii) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von D_n.

(Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen geradem und ungeradem n.)

Lösung:

Aufgabe 10.3 (Kompositionsreihen und Auflösbarkeit) **[2 + 2 Punkte]**

(i) Finden Sie alle Kompositionsreihen der Gruppen A_4, D_4 und D_5.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass D_n auflösbar ist.

Lösung:

Aufgabe 10.4* (Verband-Isomorphismus) **[1 + 3 Punkte]**

Sei G eine Gruppe und sei $N \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe von G. Sei $\varphi\colon G \to G/N$ die kanonische Projektion. Falls $A \leq G$ und $N \leq A$, so schreiben wir $\overline{A} := A/N$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung φ^* gegeben durch

$$\varphi^*\colon A \mapsto \varphi(A) = \overline{A}$$

eine bijektive Abbildung von der Menge der Untergruppen von G, die N enthalten, in die Menge der Untergruppen von G/N ist.

(b) Seien $A, B \leq G$ mit $N \leq A$ und $N \leq B$. Zeigen Sie den *Satz des Verband-Isomorphismus*:

(i) Genau dann gilt $A \leq B$, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$. In diesem Fall folgt $[B : A] = [\overline{B} : \overline{A}]$.

(ii) Genau dann gilt $A \trianglelefteq B$, wenn $\overline{A} \trianglelefteq \overline{B}$. In diesem Fall gilt $B/A \cong \overline{B}/\overline{A}$.

(iii) $\overline{\langle A \cup B \rangle} = \langle \overline{A} \cup \overline{B} \rangle$.

(iv) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Lösung:

Abgabe: Bis **Dienstag, 26. Januar 2021, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.