Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020/2021

**Übungen zur Vorlesung Algebra I**
**Blatt 11**

**Abgabe von:** Mein Name
**Tutor(in):** Mein Lieblingstutor

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Allgemeiner Hinweis:** Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 21 vorausgesetzt. Es dürfen jedoch alle Resultate verwendet werden, die bis zur Abgabefrist im Online-Skript behandelt wurden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.
Dies ist das letzte Blatt, das vor Beginn der vorlesungsfreien Zeit im Tutorium besprochen wird. Es wird jedoch weitere Übungsaufgaben geben, die für die Vorbereitung auf die Klausur hilfreich sind.

**Aufgabe 11.1** (Sylow-Untergruppen) **[2 + 2 Punkte]**

(a) Sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $n$. Zeigen Sie für die Fälle $n = 200$ und $n = 462$, dass $G$ nicht einfach ist.

(b) Seien $p$, $q$ und $r$ Primzahlen mit $p < q < r$ und sei $G$ eine Gruppe mit $|G| = pqr$. Zeigen Sie, dass $G$ für ein $s \in \{p, q, r\}$ eine normale Sylow-$s$-Untergruppe besitzt.

**Lösung:**

**Aufgabe 11.2** (Ordnung und Eindeutigkeit) **[4 Punkte]**

Zeigen Sie, dass es (bis auf Isomorphie) genau eine Gruppe der Ordnung 1001 gibt.

**Lösung:**

**Aufgabe 11.3** (Bahnenanzahl) **[4 Punkte]**

Sei $G$ eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge $X$ operiert. Für $g \in G$ sei $\mathrm{Fix}(g) := \{x \in X \mid gx = x\}$. Die Menge $\{Gx \mid x \in X\}$ enthält alle verschiedenen Bahnen von Elementen aus $X$. Zeigen Sie:

$$|\{Gx \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

**Lösung:**

**Aufgabe 11.4*** (Zentrum) **[2 + 2 Punkte]**

Seien $p, k \in \mathbb{N}$ mit $p$ prim und sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $p^k$.

(i) Zeigen Sie, dass das Zentrum $C_G$ von $G$ nicht-trivial ist.

(ii) Sei nun $k = 2$. Zeigen Sie, dass $G$ abelsch ist.

**Lösung:**

**Abgabe:** Bis **Dienstag, 02. Februar 2021, 15:15 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor.
Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.