

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 12 (erste Hälfte)

Allgemeiner Hinweis: Dieses Blatt wird nicht bepunktet und dient lediglich zu Ihrer eigenen Vorbereitung auf die Klausur. Für die Bearbeitung werden alle Resultate der Vorlesung vorausgesetzt.

Aufgabe 12.1 (Quaternionengruppe)

Sei $G = \{-1, 1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ die Quaternionengruppe, d.h. die Gruppe der Ordnung 8 in welcher Folgendes gilt:

$$(-1)^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \text{ und } (-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a \text{ für } a \in \{i, j, k\}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass alle Untergruppen von G normal sind.
- (ii) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von G und folgern Sie, dass G auflösbar ist.

Aufgabe 12.2 (Satz von Cauchy)

Sei G eine endliche abelsche Gruppe und sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primteiler von $|G|$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in G$ mit $|x| = p$ gibt.

(Hinweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $|G| = pn$. Zeigen Sie die Aussage per Induktion nach n . Betrachten Sie dabei im Induktionsschritt $G/\langle y \rangle$ für ein geeignetes $y \in G$.)

Aufgabe 12.3 (Multiplikativität des Gruppenindex)

Sei G, H, K Gruppen, für die $K \leq H \leq G$ gilt und für welche die Gruppenindizes $[G : H]$ und $[H : K]$ endlich sind. Zeigen Sie, dass $[G : K]$ endlich ist und dass

$$[G : K] = [G : H][H : K]$$

gilt.