

## Übungen zur Vorlesung Algebra I Weihnachtsblatt

Frohe Weihnachten!



**Abgabe von:** Mein Name

**Tutor(in):** Mein Lieblingstutor

*Frohe Weihnachten auch an die Tutorinnen und die Tutoren!  
Dieses Zusatzblatt ist freiwillig, ihr könnt jedoch Bonuspunkte  
sammeln, indem ihr eure Lösungen zu diesen algebraischen  
Weihnachtsrätseln im neuen Jahr abgibt.*

### Zusatzaufgabe 1

[2 Punkte]

Da immer mehr Kinder vom Weihnachtsmann teure Spielekonsolen und Spotify-Premium-Abos geschenkt bekommen, wurde in der Spielzeugabpackfabrik am Nordpol das Budget für Spielzeugautos gekürzt. Daher musste der Warenwichtel sich etwas einfallen lassen, um dennoch genug Spielzeugautos für das Fest zu haben. Anstelle teurer handverarbeiteter Autos bestellte er also dieses Jahr die Restbestände einer chinesischen Spielzeugfabrik. Zwar reichte auch hier das Geld nicht für die 1000 Autos, die sie in den vorigen Jahren jeweils hatten; die Fabrik versprach aber zumindest, dass ihre Restbestände fast an diese Anzahl heranreichen würden.

Als der Warenwichtel das Paket aus China öffnete, stellte er mit Entsetzen fest, dass alle Spielzeugautos einfach nur lose und bunt gemischt darin enthalten waren. Lediglich ein Zettel lag bei, auf dem stand:

*„Liebe Weihnachtswichtel am Nordpol,  
leider ist es uns nicht gelungen, diesen Satz Spielzeugautos in gleichgroßen  
Boxen abzapacken. Als wir die Autos komplett auf Boxen aufteilten, in denen  
Platz für je 11 Stück war, blieben am Ende 5 übrig; als wir mit ihnen Zehner-  
boxen füllten, waren es noch 3 Autos zu viel; als wir es mit den Neunerboxen  
probierten, blieb noch immer eines übrig. Daher haben wir uns entschieden,  
sie einfach in einem großen Paket zu versenden.“*

Verzweifelt denkt sich der Warenwichtel: „Das klingt überhaupt nicht gut! Schließlich will der Weihnachtsmann präzise Angaben zu den Anzahlen der jeweiligen Spielzeuge haben. Letztes Jahr gab es doch schon Ärger, weil eine meiner Zählungen falsch war und deshalb ein kleines Mädchen kein Samsung Galaxy S20+ bekam. Wenn ich die Autos per Hand abzählen muss, dann erzähle ich mich mit Sicherheit. Und nur mit diesen Angaben kann ich doch nicht ermitteln, wie viele Spielzeugautos geliefert wurden. Dieser chinesische Restesatz von Spielzeugautos ist nutzlos!“

Ist er das wirklich? Rette den Kopf des Warenwichtels, indem du anhand aller Informationen ermittelst, wie viele Autos geliefert wurden. Erkläre auch, warum deine Lösung die einzig mögliche ist.

**Lösung:**

**Zusatzaufgabe 2****[3 Punkte]**

Sei  $A = \mathbb{Q}[R]$  der Polynomring über  $\mathbb{Q}$  in der Variablen  $R$ . Sei  $A[X, Y, Z]$  der Polynomring über  $A$  in den Variablen  $X, Y, Z$ . Für ein Polynom  $f \in A[X, Y, Z]$  bezeichne  $\deg f$  den Grad von  $f$  in den Variablen  $X, Y, Z$ . Seien  $a, e, m, r \in \mathbb{N}$ . Faktorisiere das folgende Polynom in  $A[X, Y, Z]$  in seine Primfaktoren:

$$-m^a r Y Z^2 + r X Y - m^{a+e} R^2 Z^2 + m^e R^2 X.$$

Schreibe das Produkt der Primfaktoren sowie die Summe der Monome in jedem Primfaktor in aufsteigender Reihenfolge der Grade.

**Lösung:**

**Abgabe:** Bis **Donnerstag, 07. Januar 2021, 10:00 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.

