Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2020 / 2021

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lothar Sebastian Krapp

Mini-Probeklausur zur Algebra I (B3)

Diese Mini-Probeklausur soll Ihnen zur Vorbereitung auf die Klausur helfen, indem sie die allgemeine Struktur verdeutlicht. Die tatsächliche Klausur wird 6 Aufgaben haben und alle 4 Kapitel, 26 Skripte und 12 Übungsblätter der Vorlesung abdecken!

Matrikelnummer: Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichte Punktzahl				
Korrektor (Initialen)				
Maximalpunktzahl	10	10	10	60

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **3 Aufgaben**.
2. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
3. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
4. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
5. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
6. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
7. In Aufgaben, in denen Definitionen verlangt werden, dürfen Sie sämtliche Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und Lineare Algebra II der vergangenen beiden Semester als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe und Notationen müssen definiert werden.
8. Sofern nicht anders vermerkt dürfen Sie jeweils alle **Definitionen, Notationen und Ergebnisse** (außer dem zu beweisenden Resultat selbst) aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Formulieren Sie das **Lemma von Gauß**.

(Sie dürfen alle in der Formulierung auftretenden Begriffe und Notationen als bekannt voraussetzen.)

(b) (5 Punkte) Seien R ein faktorieller Ring, $F = \mathrm{Quot}(R)$ sowie $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ mit $\deg(p) \geq 1$ und $\mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_n) = 1$. Zeigen Sie, dass $p(x)$ genau dann in $R[x]$ irreduzibel ist, wenn $p(x)$ in $F[x]$ irreduzibel ist. Folgern Sie: Wenn $p(x) \in R[x]$ normiert und irreduzibel in $R[x]$ ist, so ist $p(x)$ irreduzibel in $F[x]$.

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

(i) $f(x) = x^9 + 35x^6 - 91x^4 - 49x^3 + 21x + 56$ in $\mathbb{Q}[x]$

(ii) $g(x) = x^3 + 8x^2 + 15x - 2$ in $\mathbb{Q}[x]$

Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 2 zu Aufgabe 1

(a) Sei R ein faktorieller Ring, sei $F = \operatorname{Quot}(R)$ und sei $p \in R[x]$. Wenn p reduzibel in $F[x]$ ist, so ist es reduzibel in $R[x]$:

Wenn es $A, B \in F[x]$ mit $\deg(A) \geq 1$, $\deg(B) \geq 1$ und $p = AB$ gibt, dann gibt es $r, s \in F \setminus \{0\}$ mit $rA, sB \in R[x]$ und $p = rAsB \in R[x]$.

(b) Nach (a) gilt: Ist $p(x)$ in $F[x]$ reduzibel, so ist es in $R[x]$ reduzibel.

Sei umgekehrt $p(x)$ in $R[x]$ reduzibel. Dann gibt es $a(x), b(x) \in R[x] \setminus R^\times$ mit $p(x) = a(x)b(x)$, wobei $a(x), b(x) \in R[x]$. Weiterhin gilt $a(x), b(x) \notin R$, da sonst der ggT der Koeffizient von $p(x)$ in R ungleich 1 wäre. Also $\deg(a), \deg(b) \geq 1$. Insbesondere gilt $p(x) = a(x)b(x)$ für $a(x), b(x) \in F[x]$ mit $\deg(a), \deg(b) \geq 1$, also ist $p(x)$ in $F[x]$ reduzibel.

Die letzte Behauptung folgt aus der Tatsache, dass der ggT der Koeffizienten eines normierten Polynoms immer gleich 1 ist.

(c) (i) Man bemerke, dass die Primzahl 7 jeden Koeffizienten von

$$f(x) = x^9 + 35x^6 - 91x^4 - 49x^3 + 21x + 56,$$

außer den Leitkoeffizienten teilt und dass $7^2 = 49$ nicht den konstanten Koeffizienten 56 teilt. Da f normiert ist, folgt aus Eisensteinskriterium, dass f irreduzibel in $\mathbb{Z}$ ist, und damit aus dem Lemma von Gauß, dass f irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ ist.

(ii) Wie betrachten $g_3(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$. Dieses hat keine Nullstellen, da $g_3(0) = g_3(1) = -g_3(2) = 1$. Da g_3 vom Grad 3 ist, folgt daraus, dass es irreduzibel in $\mathbb{F}_3$ ist. Aus dem Reduktionskriterium folgt, dass g irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ ist (da g normiert ist) und aus dem Lemma von Gauß folgt die Irreduzibilität in $\mathbb{Q}[x]$.

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 4 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer:

Seite 1 zu Aufgabe 2

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Aufgabe 2 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Sei L/K ein endliche Körpererweiterung und sei $\alpha \in L$. Definieren Sie das **Minimalpolynom** $m_{\alpha,K}$ von α. Welche Beziehung gibt es zwischen $m_{\alpha,K}$ und $[K(\alpha) : K]$?

(b) (3 Punkte) Sei L/K eine Körpererweiterung und sei $\alpha \in L$ algebraisch über K. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $[K(\alpha^n) : K] \geq \frac{1}{n}[K(\alpha) : K]$.

(c) (5 Punkte) Bestimmen Sie den Grad folgender Erweiterungen:

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt[3]{2}})/\mathbb{Q}$

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[5]{3})/\mathbb{Q}$

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[6]{3})/\mathbb{Q}$

Begründen Sie dabei Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 2 zu Aufgabe 2

(a) $m_{\alpha,K} \in K[x]$ ist das eindeutige normierte irreduzible Polynom in $K[x]$ mit $m_{\alpha,K}(\alpha) = 0$ und $m_{\alpha,K} \mid f$ in $K[x]$ für alle $f \in K[x]$ mit $f(\alpha) = 0$. Es gilt $[K(\alpha) : K] = \deg(m_{\alpha,K})$.

(b) Sei $m = m_{\alpha^n,K}$. Dann ist $[K(\alpha^n) : K] = \deg(m) =: k$. Nun ist m von der Form $m(x) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i \in K[x]$. Weiterhin folgt $0 = m(\alpha^n) = \alpha^{nk} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \alpha^{ni}$. Damit ist α eine Nullstelle vom normierten Polynom

$$r(x) = x^{nk} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{ni} \in K[x].$$

Da dieses Grad nk hat, folgt schon

$$[K(\alpha) : K] \leq \deg(r) = nk = n[K(\alpha^n) : K]$$

und damit die Behauptung.

(c) (i) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt[3]{2}}) : \mathbb{Q}] = 6$:
Setze $\alpha = \sqrt{2+\sqrt[3]{2}}$. Wir haben $\alpha^2 = 2 + \sqrt[3]{2}$, also

$$(\alpha^2 - 2)^3 = 2.$$

Setze

$$m(x) = (x^2-2)^3 - 2 = x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 10.$$

Dieses Polynom ist normiert und irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$: Nach Eisenstein für $p = 2$ ist es irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$, da 2 jeden Koeffizienten von m außer dem Leitkoeffizienten teilt und $2^2 = 4$ nicht den konstanten Koeffizienten teilt. Nach dem Lemma von Gauß ist m irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$. Es folgt, dass der Grad der Körpererweiterung durch $\deg(m) = 6$ gegeben ist.

(ii) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[5]{3}) : \mathbb{Q}] = 10$: Setze $\alpha = \sqrt{3}$ und $\beta = \sqrt[5]{3}$. Dann gilt

$$m_{\alpha,\mathbb{Q}}(x) = x^2 - 3 \text{ und } m_{\beta,\mathbb{Q}} = x^5 - 3.$$

Offensichtlich sind α bzw. β Nullstellen des jeweiligen Polynoms und die Polynome sind beide normiert. Weiterhin können wir Eisensteins Kriterium mit $p = 3$ anwenden, um zu zeigen, dass beide Polynome irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ sind. Zuletzt sind sie auch irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ nach dem Lemma von Gauß. Nun gilt nach der Multiplikativität der Körpergrade

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\alpha)]$$

und

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 5[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\beta)].$$

Daraus folgt $2 \mid [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}]$ und $5 \mid [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}]$, also $10 \leq [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}]$. Zuletzt erhalten wir, da $m_{\alpha,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}(\beta)[x]$, schon

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\beta)] \leq \deg(m_{\alpha,\mathbb{Q}}) = 2,$$

also

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] \leq 2 \cdot 5 = 10.$$

(iii) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[6]{3}) : \mathbb{Q}] = 6$: Offensichtlich ist $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3})$, da $(\sqrt[6]{3})^3 = \sqrt{3}$. Damit ist $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[6]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3})$. Nun hat $\sqrt[6]{3}$ das Minimalpolynom $x^6 - 3$ über $\mathbb{Q}$. (Die Argumentation erfolgt identisch zu (b) mit Eisenstein für $p = 3$ und dem Lemma von Gauß.) Daraus folgt schon

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}) : \mathbb{Q}] = 6.$$

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 4 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Formulieren Sie die **Bahngleichung**.

(Sie dürfen alle auftretenden Begriffe und Notationen als bekannt voraussetzen.)

(b) (5 Punkte) Sei G eine Gruppe, die transitiv auf einer Menge $S \neq \emptyset$ operiert. Sei $s \in S$ fest und setze $H = \mathrm{Stab}_s$. Zeigen Sie, dass die angegebene transitive Aktion von G auf S äquivalent zur Aktion von G auf $\overline{G} := \{xH \mid x \in G\}$ durch linke Multiplikation ist. Folgern Sie: Falls G endlich ist, dann ist $|S| = [G : \mathrm{Stab}_s]$.

(c) (3 Punkte) Sei G eine Gruppe der Ordnung 77, die auf einer Menge X der Kardinalität 27 operiert. Zeigen Sie, dass diese Aktion mindestens einen Fixpunkt besitzt, d.h. es existiert $x \in X$ mit $gx = x$ für alle $g \in G$.

Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 2 zu Aufgabe 3

(a) Sei S eine endliche Menge und sei G eine Gruppe, die auf S operiert. Wähle ein Vertretersystem $\{x_1, \dots, x_r\}$ der Bahnen. Dann gilt

$$|S| = \sum_{i=1}^{r} [G : \mathrm{Stab}_{x_i}].$$

(b) Definiere $\nu\colon \overline{G} \to S$ mit $\nu(xH) := xs$. Wir überprüfen, dass ν eine Bijektion mit $\nu(gX) = g\nu(X)$ für alle $X \in \overline{G}$ und alle $g \in G$ ist.

- ν ist wohldefiniert und injektiv: Für alle $x, y \in G$ gilt: $xH = yH$ gdw. $y^{-1}x \in H = \mathrm{Stab}_s$ gdw. $(y^{-1}x)s = s$ gdw. $xs = ys$.
- ν ist surjektiv: Da die Aktion von G auf S transitiv ist, gibt es für alle $t \in S$ ein $x \in G$ mit $t = xs = \nu(xH)$.
- Seien $x, g \in G$. Wir berechnen: $\nu(g(xH)) = \nu((gx)H) = (gx)s = g(xs) = g\nu(xH)$.

Es folgt wegen der Bijektivität von S zu $\overline{G}$:

$$|S| = |\overline{G}| = [G : H] = [G : \mathrm{Stab}_s].$$

(c) Für alle $x \in X$ gilt $|Gx| = [G : \mathrm{Stab}_x] \mid |G| = 77$. Alle Bahnen haben also Länge 1, 7, 11 oder 77. Angenommen, es gäbe keine Bahn der Länge 1. Dann gibt es nach der Bahngleichung $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ mit

$$27 = 7a + 11b + 77c.$$

Offensichtlich muss $c = 0$ sein, also $27 = 7a + 11b$. Nun ist $b \in \{0, 1, 2\}$ und wir untersuchen alle drei Fälle: Falls $b = 2$, gilt $7a + 22 = 27$, also $7a = 5$. Falls $b = 1$, gilt $7a = 16$. Falls $b = 0$, gilt $7a = 27$. In allen drei Fällen folgt $a \notin \mathbb{N}_0$, ein Widerspruch.

Daher gibt es ein x mit $|Gx| = 1$, also $gx = x$ für alle $g \in G$.

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 4 zu Aufgabe 3