Prof. Dr. H. Neunzert
Dr. M. Junk

WS 2001/02-3

Übung *Analysis I*

Rückgabe: 12:00, Freitag 23.11.

Aufgabe 11:

Für jede der Folgen

$$\frac{n^3+100n}{100n^2+n},\qquad n!,\qquad \frac{\sin(n)}{n},\qquad \frac{1+2+\cdots+n}{n^2},$$
$$\frac{n^3-12n^2+44n-48}{2n^3-12n^2+22n-10},\qquad \frac{3^n}{n!},\qquad \sin(n),\qquad \sqrt{4n^2+n}-2n.$$

(i) Skizzieren Sie den Verlauf der Folge (empfehlenswert (!) ist die Benutzung eines Computers; wählen Sie z.B. den Indexbereich $n = 1, 2, \ldots, 50$, plotten Sie die Punkte (n, s_n), und geben Sie das Ergebnis als Computergrafik ab).

(ii) "Erraten" Sie ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt und geben Sie im konvergenten Fall den Grenzwert an.

(iii) Beweisen Sie die Vermutung aus (ii) durch Anwendung der Definition von Konvergenz und geeigneter Abschätzungen (nicht mit Grenzwertsätzen).

(Sie können "Schulwissen" über $\sin(\cdot)$ und $\sqrt{\cdot}$ benutzen.)

Aufgabe 12:

Sei (s_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: wenn $\lim s_n = s$, dann gilt $\lim |s_n| = |s|$. Wann gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

Aufgabe 13:

Sei (s_n) eine konvergente Folge mit $\lim s_n > s$. Zeigen Sie, dass dann eine Zahl N existiert, so dass $s_n > s$ für alle $n > N$.

Aufgabe 14:

Beweisen Sie die Grenzwertsätze für konvergente Folgen (x_n), (y_n):

$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n, \qquad \lim(x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n$$

und, falls $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim y_n \neq 0$, dann $\lim(x_n/y_n) = \lim x_n / \lim y_n$.