Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik
N. Hermann

Mathematik I

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

Blatt 3

Aufgabe 9: (schriftlich)

a) Bilden die folgenden Mengen eine Basis des $\mathbb{R}^3$ (mit Begründung)?

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ eine Basis von $U = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ist.
(2) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\vec{c}$ bezüglich $\mathcal{A}$.

Aufgabe 10: (schriftlich)

Gegeben seien folgende Basen des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{N} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}.$$

Der Vektor $\vec{v}$ hat bezüglich $\mathcal{A}$ die Koordinatendarstellung $\vec{v_{\mathcal{A}}} = \vec{v} \overset{\mathcal{A}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Welche Koordinatendarstellung hat $\vec{v}$ bezüglich der Basen $\mathcal{N}$ bzw. $\mathcal{B}$?

bitte wenden

Aufgabe 11: (mündlich)

a) Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Beschreiben Sie kurz in Worten und mit den wichtigsten Formeln, wie man aus der Basis $\mathcal{A} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ von $U = \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ eine ONB erzeugt.

b) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c_\alpha} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

(1) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_\alpha}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(2) Berechnen Sie eine ONB $\mathcal{B}$ von $U = \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

(3) Bestimmen Sie die orthogonale Zerlegung von $\vec{c_1}$ bezüglich der Basis $U = \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Aufgabe 12: (mündlich)

a) Es seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2s \\ s^2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Für welches $s \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ eine orthogonale Basis? Erzeugen Sie dann daraus eine ONB.

b) Berechnen Sie die Winkel zwischen den jeweiligen Vektoren:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Besprechung: ab 12. Nov. 2018 in den Übungen.