Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik
N. Hermann

Mathematik I

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

Blatt 11

Aufgabe 41: (schriftlich)

Gegeben sei die Funktion $h(x,y) = 5 + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 - 4}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und skizzieren Sie diesen.

b) Geben Sie den Wertebereich $\mathbb{W}$ von h an.

c) Bestimmen Sie $\nabla h(x,y)$ und $h_{xy}(x,y)$.

d) Ist h injektiv (mit Begründung)?

e) Berechnen Sie von $h(x,y)$ die Richtungsableitung im Punkt $\vec{a} = (1,0)$ in Richtung des Vektors $\vec{b} = (1,1)$.

Aufgabe 42: (schriftlich)

Gegeben sei die Funktion $h(x,y) = \ln\left(1 + \exp\left(-(x+1)(y-1)\right)\right)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und den Wertebereich $\mathbb{W}$.

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen h_x, h_y und h_{xy} an der Stelle $a = (0,1)$.

c) Skizzieren Sie die Höhenlinie $h(x,y) = \ln(2)$ und den Gradienten von h an der Stelle $a = (0,1)$.

d) Ermitteln Sie für $h(x,y)$ im Punkt $\vec{a} = (0,1)$

i) die Steigung in Richtung $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

ii) die Richtung und den Wert des maximalen Anstiegs.

bitte wenden

Aufgabe 43: (mündlich)

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}, \quad f_2(x,y) = \ln(4-x^2-y^2), \quad f_3(x,y) = \exp(1+xy)$$

Weiter sei

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ f_3(x,y) \end{pmatrix}$$

(1) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von $F(x,y)$ und skizzieren Sie diesen.

(2) Berechnen Sie die Funktionalmatrix $DF(x,y)$.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Kurven.

(1) $r_1(t) = (\cos(t^2), \sin(t), \exp(t^2+1))$

(2) $r_2(t) = (\cos^2(t) + \sin^2(t), \cos^2(t) - \sin^2(t))$

Aufgabe 44: (mündlich)

Gegeben sei die Funktion $h(x,y,z) = \exp((x-1)(y+1)(z+2))$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich von h.

b) Berechnen Sie $\nabla h(0,0,0)$ und die Lösungsmenge von $\nabla h(x,y,z) = \vec{0}$.

c) Bestimmen Sie im Ursprung die Ableitung von h in Richtung $\vec{b} = (2,-2,1)$.

d) Für welche Richtung $\vec{d}$ wird im Ursprung die Ableitung möglichst groß? Ermitteln Sie den Wert der maximalen Richtungsableitung.

Besprechung: ab 21. Jan. 2019 in den Übungen.