



# Mathematik I

für die Studiengänge Chemie, Life Science und Nanoscience

## Blatt 12

**Aufgabe 45:** (schriftlich)

a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{4x^2}$$

b) Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Bestimmen Sie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n}$$

**Aufgabe 46:** (schriftlich)

Gegeben sei die Funktion  $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ .

Bestimmen Sie alle Extrema und Sattelpunkte von  $f(x, y)$ .

**Aufgabe 47:** (mündlich)

Es sei  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $f(1) = 0$ ,
- (ii)  $f'(t) < 0$  für alle  $t \in [0, 2]$ ,
- (iii)  $f''(t) > 0$  für  $t \in [0, 1]$  und  $f''(t) < 0$  für  $t \in (1, 2]$ .

a) Skizzieren Sie diese Funktion.

b) Hat diese Funktion einen Wendepunkt? Geben Sie diesen gegebenenfalls an.

c) Hat diese Funktion einen Sattelpunkt? Geben Sie diesen gegebenenfalls an.

**Aufgabe 48:** (mündlich)

Gegeben sei die Funktion  $h(x, y) = \exp(4 - x^2 - 4(y - 1)^2)$ .

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich von  $h$ .

b) Skizzieren Sie die Höhenlinie von  $h$  zum Niveau  $c = 1$ .

c) Berechnen Sie  $\nabla h(x, y)$  und Hess  $h(x, y)$ .

d) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte von  $h$ .