



Übungen zur **Mathematik I**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Differenzierbarkeit von Funktionen**

(1) Bestimmen Sie für $f(x) = \exp(-3x)$ bzw. $f(x) = \frac{1}{(1+3x)^2}$ eine allgemeine Formel für $f^{(n)}(x)$. Berechnen Sie jeweils auch $f^{(n)}(0)$.

(2) Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung von der logistischen Kurve

$$L(t) = \frac{a}{1 + \exp(b - ct)}.$$

(3) Bestimmen Sie Gradient $\nabla h(u, v)$ und Hesse-Matrix $\text{Hess } h(u, v)$ von $h(u, v) = \sin(u^2 + v^2)$. Berechnen Sie auch $\nabla h(0, 0)$ und $\text{Hess } h(0, 0)$.

(4) Gegeben sei die Funktion $h(x, y) = \ln \left(\frac{x + 2y^2}{\sqrt{8 - x^2 - 2x - y^2}} \right)$.

a) Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich von h und skizzieren Sie ihn.

b) Bestimmen Sie $h_x(x, y)$, $h_y(x, y)$ und $\nabla h(x, y)$. Ermitteln Sie den Gradienten von h an der Stelle $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1)$ und zeichnen Sie ihn in Ihre Skizze des Definitionsbereichs von h .

(Tipp zu a) und b): ln-Regeln.)

(5) Gegeben sei die Funktion $h(x, y) = \sqrt{36 - 9(y - 1)^2 - 4(x + 1)^2}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich \mathbb{D} und den Wertebereich \mathbb{W} von h . Skizzieren Sie \mathbb{D} .

b) Berechnen Sie $h_{xy}(x, y)$.

c) Zeichnen Sie in das Schaubild aus a)

i) die Höhenlinie durch den Punkt $(1, 1)$,

ii) die Richtung des Gradienten $\nabla h(1, 1)$.

d) Gibt es ein $\vec{a} \in \mathbb{D}$ so, dass für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\frac{\partial h(\vec{a})}{\partial \vec{b}}$ verschwindet? Falls ja, so geben Sie \vec{a} an.

(6) Es sei $h(x, y) = \sqrt{9 - (2x - y)^2}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich \mathbb{D} von h und skizzieren Sie diesen. Geben Sie den Wertebereich \mathbb{W} von h an.

b) Ist h injektiv (mit Begründung)?

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von h im Punkt $\vec{a} = (1, 1)$ in Richtung $\vec{b} = (-2, 1)$.

d) Für welche Richtung \vec{d} wird im Punkt $\vec{a} = (1, 1)$ die Richtungsableitung möglichst groß? Ermitteln Sie den Wert der maximalen Richtungsableitung.