Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik

Übungen zur **Mathematik I**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Folgen, Reihen, Grenzwerte, Stetigkeit, spezielle Funktionen**

(1) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ (falls möglich):

$$\begin{aligned}
a_n &= 3^n \\
a_n &= (-3)^n \\
a_n &= (-3)^{-n} \\
a_n &= \exp\left(-\tfrac{1}{n}\right) \\
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n+1} \\
a_n &= \ln\left(\tfrac{n+3}{2n+7}\right) \\
a_n &= \cos^2(n) + \sin^2(n)
\end{aligned}$$

(2) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3}{n^3+n+1}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{7n^4+n^3+n^2}{n^5+10n^4+n^3+1}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+7n^2-4n}{100n^2+n+1}\,.$$

(3) Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Funktionen für $x \to \infty$:

$$f(x) = \frac{5x^4-3x^2+6}{2(x+1)^4+3}\,, \qquad h(x) = \frac{\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (2x)^{N-i}}{(x-3)^N}\,,$$

$$r(x) = \frac{(x^2+26x+169)^3(2x^3-1)}{(x^4-4)(x+1)^3(x-10^8)}\,, \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+3}\,,$$

(4) Gibt es ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, welches die Nullstellen $x_1 = 1,\ x_2 = 2,$ $x_3 = 3$ besitzt und $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = -\infty$ erfüllt? Falls ja, so geben Sie ein solches Polynom an.

(5) Überprüfen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{x^2-4}{(x-2)^2}\right)\,, \qquad \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x^2-4}{(x-2)^2}\right)\,, \qquad \lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2-4}{(x-2)^2}\right)\,,$$

b) $$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)\,, \qquad \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)\,, \qquad \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)\,.$$

bitte wenden

(6) Berechnen Sie die folgenden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k+2}}{(k+1)!}\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{5^{k+1}}\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{2\,k!}\,, \qquad \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\sin(k\pi)}{k!}\,.$$

(7) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $h(x) \;=\; \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ und untersuchen Sie h auf Stetigkeit.

(8) Finden Sie Intervalle $[a,b]$, in denen $p(x) = -3x^5 + 6x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 3$ eine Nullstelle besitzt.

(9) Welche Exponentialfunktion $h(t) = \exp(a + bt)$ geht in einem halblogarithmischen Koordinatensystem (Ordinate nat.-log.) durch die Punkte $(1|4)$ und $(2|7)$?

(10) Die beiden Mengen A und B haben in Polarkoordinaten die Darstellung

$$A \;=\; \{(r,\varphi)\;:\;1 \le r \le \infty\,,\;\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\}\,,\quad B \;=\; \{(r,\varphi)\;:\;1 \le r \le 2\,,\;\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}\}\,.$$

Skizzieren Sie diese Mengen in einem kartesischen Koordinatensystem.

(11) Eine radioaktive Substanz hat eine Halbwertszeit von 50 Jahren. Nach wie vielen Jahren sind 99 % der Substanz zerfallen?

(12) Bei der ^{14}C-Methode zur Altersbestimmung nutzt man aus, dass in lebenden Organismen das Verhältnis von ^{14}C und ^{12}C einen festen Wert c_0 hat. In toten Organismen zerfällt das Isotop ^{12}C praktisch nicht, während das Isotop ^{14}C mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren zerfällt.
Bei einer Ausgrabung wird ein Knochen gefunden, bei dem das Verhältnis von ^{14}C und ^{12}C auf 10% von c_0 gesunken ist. Bestimmen Sie das Alter dieses Knochens.

(13) Bei einem Zerfallsexperiment (bei dem eine Funktion der Form $f(t) = \alpha \cdot \exp(\lambda t)$ angenommen wird) liefert eine Messreihe die folgenden Zahlenwerte:

t	0.50	1.00	2.00	3.00	5.00	7.00
y	2.30	1.95	1.05	0.72	0.24	0.10

Bestimmen Sie anhand dieser Messwerte graphisch die Parameter α und λ.