Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik

Übungen zur **Mathematik I für Chemie, Life Science und Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zur **Vektorrechnung**

(1) (Maximum und Minimum) Berechnen Sie

$$\max\{5-k \,:\, k=2,3,\dots,10\}\,,\quad \min\{5-k \,:\, k=2,3,\dots,10\}\,,$$
$$\max\{|5-k| \,:\, k=2,3,\dots,10\}\,,\quad \min\{|5-k| \,:\, k=2,3,\dots,10\}\,,$$
$$\max\{x^3-1 \,:\, -2\le x\le 2\}\,,\quad \min\{x^3-1 \,:\, -2\le x\le 2\}\,.$$

(2) Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2}\le 1\}\,,\\ M_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \max\{|x|,|y|\}\le 1\}\,,\\ M_3 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, |x|+|y|\le 1\}\,,\\ M_4 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 1\le (x-1)^2+(y+2)^2\le 4\}\,. \end{aligned}$$

Welche Teilmengen-Beziehungen gelten zwischen den Mengen $M_1,\ M_2,\ M_3$?

(3) Untersuchen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix};$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\12\\7\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix};$ **d)** $\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\2\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\0\\3\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\2\\4\\4\end{pmatrix}.$

(4) Es sei $U = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.
Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Vektoren in U liegen:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix},\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix},\qquad \vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}.$$

(5) Gegeben seien die Vektoren $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix},\ \vec{c}_\lambda = \begin{pmatrix}0\\1\\\lambda\end{pmatrix}\quad .$

a) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Bestimmen Sie eine ONB von $\operatorname{span}\{\vec{a},\vec{b}\}$.
b) Wählen Sie $\lambda=\lambda_1$ so, dass $\vec{c}_{\lambda_1}$ in der Ebene $E=\operatorname{span}\{\vec{a},\vec{b}\}$ liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{c}_{\lambda_1}$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}=\{\vec{a},\vec{b}\}$.

bitte wenden

(6) Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms

(7) Welchen Flächeninhalt hat das Viereck mit den Ecken $A(1 \mid 1),\ B(0 \mid 3),\ C(3 \mid 4)$ und $D(2 \mid 1)$?

(8) Es seien $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

a) Welchen Abstand hat $\vec{b}$ von der Geraden $G = \operatorname{span}\{\vec{a}\}$?

b) Geben Sie einen Vektor $\vec{c}$ an mit den beiden Eigenschaften
(i) $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$,
(ii) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein Linkssystem.

(9) Es sei $\quad E = \big\{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2r + s - 2t = 0\big\}.$

a) Bestimmen Sie eine ONB $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ von E.

b) Ermitteln Sie die orthogonale Projektion von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf E. Welchen Abstand hat $\vec{x}$ von E?

c) Liegt $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in E? Falls ja, welche Koordinaten hat $\vec{y}$ bezüglich der ONB aus a) ?

(10) Für welche $r \in \mathbb{R}$ hat das von den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ r^2 \\ -4r \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelflach das (absolute) Volumen 12?

(11) **a)** Berechnen Sie das (absolute) Volumen des Tetraeders (=dreiseitige Pyramide) mit den Eckpunkten $A\,(3\,|\,2\,|\,1)$, $B\,(4\,|\,3\,|\,3)$, $C\,(3\,|\,4\,|\,1)$ und $D\,(6\,|\,4\,|\,2)$.

b) Sei E die Ebene durch die Punkte $A(1\,|-1\,|\,1)$, $B(3\,|\,2\,|\,1)$ und $C(0\,|-1\,|\,2)$. Geben Sie E in der (i) Koordinatendarstellung, (ii) Parameterdarstellung und (iii) Normalendarstellung an.

(12) Es seien $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Liegt $\vec{w}$ in $U = \operatorname{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$? Falls ja, welche Koordinaten hat $\vec{w}$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$?