**Universität Konstanz**

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

11. April 2017

# Nachklausur zur **Mathematik I**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

| **Name** | **Vorname** | **Matrikel-Nr.** | **Studiengang** |
|---|---|---|---|
| | | | |

## Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **fünf** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Bitte schreiben Sie auf dieses Blatt Ihren Namen und die Matrikelnummer und auf jedes Blatt Ihren Namen.
   **Dieses Blatt muss wieder abgegeben werden.**
3. **Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.** Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**. Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen Rand für die Korrektur.
4. Die Klausur dauert 90 Minuten.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 1 handgeschriebenes Blatt (DIN A 4) mit eigenen Notizen (keine Kopien, keine Verkleinerungen).
   Alle anderen Hilfsmittel (Taschenrechner, Handy, i-Phone, Tablet, ...) sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Zum Bestehen sind mindestens 18 Punkte erforderlich (ohne Bonuspunkte).
7. Bonuspunkte gibt es nur für den ersten Versuch.

**Viel Erfolg!**

## Korrektur

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | gesamt | Bonus | total | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 10 | 9 | 8 | 12 | 6 | 45 | 5 | 50 | |
| erreicht | | | | | | | | | |

*bitte wenden*

**Aufgabe 1:** (10 Punkte)

**a)** Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{\pi - 2x}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1-x)^5}{(1+2x)^4}$ .

**b)** Bestimmen Sie $\sum\limits_{k=1}^{8} \binom{8}{k}(-1)^k 2^{8-k}$ .

**c)** Gegeben sei die Funktion $h(x) = \exp\left(\sqrt{2-4x}\right)$ .

(1) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und den Wertebereich $\mathbb{W}$ von $h$.

(2) Untersuchen Sie $h$ auf strenge Monotonie.

(3) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $h$.

**Aufgabe 2:** (9 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**a)** Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}_\lambda$ linear abhängig?

**b)** Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}_\lambda$ aufgespannte Parallelflach das (absolute) Volumen 16?

**c)** Bestimmen Sie eine ONB von $E = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ .

**d)** Welchen Abstand hat der Vektor $\vec{c}_1$ von $E = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ?

**Aufgabe 3:** (8 Punkte)

In dieser Aufgabe bezeichnet $i$ die imaginäre Einheit.

**a)** Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z = 3 + r\exp(ti)\,,\ 1 \le r \le 2,\ -\tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{3\pi}{2} \right\} .$$

**b)** Vereinfachen Sie $z = \dfrac{\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) - \exp\left(-\frac{\pi}{2}i\right)}{2i}$ .

**c)** Berechnen Sie alle Nullstellen von $p(z) = \left(2z^3 + 16i\right)\left(z^3 - 4z^2 + 13z\right)$ . Geben Sie die Nullstellen in der algebraischen Darstellung an und markieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

**Aufgabe 4:** (12 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $h(x,y) = \ln\left((x+y)^2 + (x-y)^2\right)$ .

**a)** Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und den Wertebereich $\mathbb{W}$ von $h$.

**b)** Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von $h$.

**c)** Besitzt $h$ lokale Extrema (mit Begründung)?

**d)** Bestimmen Sie zu $h$ das Taylor-Polynom vom Grad 2 an der Stelle $(1,2)$.

**Aufgabe 5:** (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{-x-2}{x}$ .

**a)** Finden Sie eine allgemeine Formel für $f^{(n)}(x)$.

**b)** Berechnen Sie die Taylor-Reihe von $f$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = -2$ . Bestimmen Sie den Konvergenzbereich von dieser Reihe.