Hyperbolische Modelle der Mathematischen Fluiddynamik Wintersemester 2022/23

Heinrich Freistühler
Universität Konstanz

Stand 20.01.2023

1 Einleitung

1.1 Bewegungsgleichungen nach Euler und Navier-Stokes-Fourier

Die Eulergleichungen der Dynamik *idealer* kompressibler Fluide lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}_x(\rho V) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \mathrm{div}_x(\rho V V^\top + pI) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathrm{div}_x((\mathcal{E}+p)V) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Das Fluid wird durch zwei Funktionen der Dichte ρ und der Temperatur θ spezifiziert, den Druck $p = p(\rho, \theta)$ und die innere Energie $e = e(\rho, \theta)$. Mit der Gesamtenergie

$$\mathcal{E} = \rho e + \frac{1}{2}\rho |V|^2$$

besteht das System (1) aus fünf PDG in den fünf Unbekannten $\rho > 0, \theta > 0, V = (V_1, V_2, V_3) \in \mathbb{R}^3$.
Annahmen über die Funktionen $p(\rho, \theta), e(\rho, \theta)$:

(2, i) es gibt eine glatte Funktion $s = s(\rho, \theta)$, so dass

$$de = \theta ds - pd(1/\rho),$$

"erstes Gesetz der Thermodynamik", s "Entropie",

(2, ii) Monotonie: $\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, \theta) > 0$ und $\frac{\partial e}{\partial \theta}(\rho, \theta) > 0$.

1.1.1 Definition. *Ein System*

$$A_0(u)\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} A_j(u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = G(u), \quad A_0, A_1, ..., A_d : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \textit{ offen}, \tag{3}$$

heißt Friedrichs-symmetrisch wenn die Matrizen $A_0, A_1, ..., A_d$ alle symmetrisch sind und A_0 positiv definit ist.

1.1.2 Satz. *(Majda 1983) Betrachte ein Friedrichs-symmetrisches System (3) und offene Mengen $U_0, U_1 \subset \mathbb{R}^n$ mit $U_0 \subset\subset U_1 \subset\subset U$. Angenommen $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d) =, s > d/2+1$, und $u_0(x) \in \mathcal{U}_0, \forall x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt mit einem $T > 0$: Es existiert genau eine Lösung $u \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ von (3) zur Anfangsbedingung $u(0,.) = u_0$ mit $u(t,x) \in \mathcal{U}_1,\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ und $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$.*

1.1.3 Korollar. *(Lokale Lösungstheorie der Eulergleichungen) Angenommen, die Bedingungen (2) sind erfüllt. Dann sind die Eulergleichungen (1) mit Anfangsdaten in geeigneten Sobolevräumen zumindest für eine gewisse Zeit $T > 0$ eindeutig lösbar; die Lösung ist von der in Satz 1.1.2 beschriebenen Art.*

Beweis. Die Eigenschaften (2) implizieren, dass die Gleichungen (1) als Friedrichs-symmetrisches System (3) geschrieben werden können. (Siehe Abschnitt 1.2.) □

Die Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen der Dynamik *dissipativer* kompressibler Fluide lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}_x(\rho V)&=0\\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial t}+\mathrm{div}_x(\rho VV^\top+pI)&=\mathrm{div}_x\big(\eta(D_xV+(D_xV)^\top)+\zeta\mathrm{div}_x(V)I\big)\\ \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}+\mathrm{div}_x(\mathcal{E}+p)V)&=\mathrm{div}_x\big(\big(\eta(D_xV+(D_xV)^\top)+\zeta\mathrm{div}_x(V)I\big)V+\kappa\,\mathrm{grad}_x\theta\big);\end{aligned}\tag{4}$$

darin quantifizieren die Dissipationskoeffizienten $\eta,\zeta,\kappa>0$ die Scherviskosität, Volumenviskosität und Wärmeleitfähigkeit des Fluids.

1.1.4 Definition. *Ein System partieller Differentialgleichungen der Form*

$$\begin{aligned}A_1^0(u,v)u_t+\sum_{j=1}^d A_{11}^j(u,v)u_{x_j}&=f_1(u,v,D_xv)\\ A_2^0(u,v)v_t-\sum_{j,k=1}^d B_2^{jk}(u,v)v_{x_jx_k}&=f_2(u,v.D_xu,D_xv)\end{aligned}\tag{5}$$

mit

$$\begin{aligned}A_1^0,A_{11}^j:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{m\times m},\ f_1:\mathcal{O}\times\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}^m,\\ A_2^0,B_2^{jk}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{n\times n},\ f_2:\mathcal{O}\times\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^{n\times d}\to\mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

$\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^{m+n}$ *offen, heißt symmetrisch hyperbolisch-parabolisch, wenn die Funktionen* $A_1^0A_{11}^j,A_2^0,B_2^{jk}$ *glatt sind und gilt:*

(6,i) A_1^0,A_2^0 *sind symmetrisch und positiv definit,*

(6,ii) A_{11}^j *sind symmetrisch,*

(6,iii) B_2^{jk} *sind symmetrisch mit* $B_2^{jk}=B_2^{kj}$*, und* $B_2^{jk}\omega_j\omega_k$ *positiv definit,* $\forall\omega\in S^{d-1}$.

Im Fall $n=0$ (kein v) reduziert sich dies auf das symmetrisch hyperbolische System

$$A_1^0(u)u_t+\sum_{j=1}^d A_{11}^j(u)u_{x_j}=f_1(u);$$

im Fall $m=0$ (kein u) auf das parabolische System

$$A_2^0(v)v_t-\sum_{j,k=1}^d B_2^{jk}(v)v_{x_jx_k}=f_2(v,D_xv).$$

1.1.5 Satz. *(Kawashima 1983) Betrachte ein System* (5) *mit den Eigenschaften (6) und nimm an, dass für ein gewisses Paar* $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{O}$

$$f_1(\bar{u}, \bar{v}, 0) = 0 \quad \textit{und} \quad f_2(\bar{u}, \bar{v}, 0, 0). \tag{7}$$

Betrachte Anfangsdaten (u_0, v_0) *mit* $(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v}) \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s > d/2+2$ *und* $(u_0(x), v_0(x)) \in \mathcal{O}_0 \subset\subset \mathcal{O}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$*. Dann existiert ein* $T > 0$*, so dass das System* (5) *zu diesen Daten eine eindeutige Lösung auf* $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ *hat mit*

$$\begin{aligned} u - \bar{u} \in& C([0,T], H^s(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^d)), \\ v - \bar{v} \in& C([0,T], H^s(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,T], H^{s-2}(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

1.1.6 Korollar. *(Lokale Lösunsgtheorie der Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen) Angenommen, die Bedingungen (6) und* (7) *sind erfüllt. Dann sind die Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen* (4) *mit Anfangsdaten in geeigneten Sobolevräumen zumindest für eine gewisse Zeit* $T > 0$ *eindeutig lösbar; die Lösung ist von der in Satz 1.1.5 beschriebenen Art.*

Beweis. System (4) erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.1.6. □

Unter geeigneten Annahmen gilt für symmetrisch hyperbolisch-parabolische Systeme mehr als nur die zeitlich lokale Existenz von Lösungen:

Satz 1.1.7. *(Kawashima 1983) Betrachte das symmetrisch hyperbolisch-parabolische System*

$$A^0(U)U_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(U)U_{x_j} - \sum_{j,k=1}^{d} B^{jk}(U)U_{x_j x_k} = f(U, D_x U), \quad U = (u, v) \in \mathcal{O} \tag{5$'$}$$

mit

$$A^0(U) = \begin{pmatrix} A_1^0(U) & 0 \\ 0 & A_2^0(U) \end{pmatrix}, \quad A^j(U) = \begin{pmatrix} A_{11}^j(U) & A_{12}^j(U) \\ A_{21}^j(U) & A_{22}^j(U) \end{pmatrix},$$
$$B^{jk}(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2^{jk}(U) \end{pmatrix}, \quad f(U, D_x U) = \begin{pmatrix} f_1(u, v, D_x v) \\ f_2(u, v, D_x u, D_x v) \end{pmatrix},$$

bei dem die Matrizen $A^0(U), A^j(U), B^{jk}(U), j, k = 1, ..., d,$ *und* L

$$L(U) = -\begin{pmatrix} D_u f_1(u, v, 0) & D_v f_1(u, v, 0) \\ D_u f_2(u, v, 0, 0) & D_v f_2(u, v, 0, 0) \end{pmatrix}$$

symmetrisch seien. Ferner seien $A^0(U)$ *und alle* $B_2(U, \omega) = \sum_{j,k=1}^d B_2^{jk}(U)\omega_j\omega_k, \omega \in S^{d-1}$*, positiv definit, und beim Gleichgewichtszustand* $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v})$ *mit* $f(\bar{U}, 0) = 0$ *sei*

$$L(\bar{U}) \textit{ positiv semidefinit.} \tag{8}$$

Für alle $\omega \in S^{d-1}$ *gelte*

$$\forall \psi \in (kerL(\bar{U}) \cap kerB(\bar{U}, \omega)) \setminus \{0\} : \ (\mu A^0 + A(\omega))\psi \neq 0, \ \forall \mu \in \mathbb{R}. \qquad (K)$$

Es seien $d \geq 3$ *und* $s \geq d/2 + 3$. *Dann gilt mit einem* $\delta > 0$ *Folgendes. Betrachte Anfangsdaten* (u_0, v_0) *mit* $(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v}) \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. *Wenn*[1]

$$\|(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v})\|_{s,1} < \delta,$$

dann hat das Anfangswertproblem von (5)′ eine eindeutige globale Lösung mit

$$\begin{aligned} u - \bar{u} &\in C([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^d)) \cap L^2([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^d)), \\ v - \bar{v} &\in C([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^d)) \cap L^2([0,\infty), H^{s+1}(\mathbb{R}^d)), \end{aligned}$$

und diese erfüllt

$$\begin{aligned} \|(u(t) - \bar{u}, v(t) - \bar{v})\|_{H^s} &\leq C\|(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v})\|_{s,1} \\ \|(u(t) - \bar{u}, v(t) - \bar{v})\|_{H^{s-1}} &\leq C(1+t)^{-d/4}\|(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v})\|_{s-1,1}. \end{aligned}$$

Das heißt, Lösungen zumindest zu kleinen Daten existieren für alle Zeiten und klingen mit einer explizit bekannten Rate ab.

Dieser Satz ist auf die Navier-Stokes-Fourier-Gleichungen anwendbar (siehe Abschnitt 1.2).

1.2 Symmetrie durch Entropie

1.2.1 Satz. *(Godunov-Lax-Friedrichs-Lax-Boillat) Falls zu einem System von Erhaltungsgleichungen*

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} (f_j(u))_{x_j} = 0, \quad f_j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n, \ \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \text{ offen und konvex}, \tag{9}$$

glatte Funktionen $\eta, q_1, ..., q_d : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ *existieren mit*

(i) $D\eta Df_j = Dq_j, \quad j = 1, ..., d,$

(ii) η *strikt konvex:* $D^2\eta > 0$,

dann lässt sich (9) *in der Variablen*

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial u}$$

in der Form

$$\left(\frac{\partial \varphi(v)}{\partial v}\right)_t + \left(\frac{\partial \varphi_j(v)}{\partial v}\right)_{x_j} = 0 \tag{10}$$

schreiben, mit Funktionen $\varphi, \varphi_1, ...\varphi_d$ *mit* $D^2\varphi > 0$.

[1] Wir verwenden $\|.\|_{l,1} := \|.\|_{H^l} + \|.\|_{L^1}$.

1.2.2 Definition. *(i) In diesem Fall heißt mit $q = (q_1, ..., q_d)$ das Paar (η, q) ein "Entropie-Entropiefluss-Paar". (ii) Es werden v als Godunov-Variable und die Funktionen $\varphi, \varphi_1, ...\varphi_d$ als Godunov-Potentiale bezeichnet.*

1.2.3 Korollar. *Ein System wie in Satz 1.2.1 ist Friedrichs-symmetrisch.*

Beweis. Gleichung (9) ist dann äquivalent zu

$$A^0(v)v_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(v)v_{x_j} = 0, \tag{11}$$

nämlich mit

$$A^0(v) = D^2\varphi(v), \quad A^j(v) = D^2\varphi_j(v). \tag{12}$$

□

1.2.4 Proposition. *(Legendre) Ist $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $\eta \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und*

$$D^2\eta > 0,$$

so ist die Abbildung $a : \mathcal{U} \to \mathcal{V} = a(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$a(u) = \frac{\partial \eta}{\partial u}(u) \tag{13}$$

ein Diffeomorphismus von $\mathcal{U}$ auf $\mathcal{V}$. Setzt man $b := a^{-1}$ und definiert $\zeta : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ durch

$$\zeta(v) = v \cdot b(v) - \eta(b(v)),$$

so ist ζ konvex:

$$D^2\zeta > 0,$$

und

$$b(v) = \frac{\partial \zeta}{\partial v}(v). \tag{14}$$

Dualerweise ist dann auch

$$\eta(u) = u \cdot a(u) - \zeta(a(u)).$$

Beweis. Es sind

$$\frac{\partial \zeta(v)}{\partial v} = b(v) + v \cdot \frac{\partial b(v)}{\partial v} - \underbrace{a(b(v))}_{=v} \cdot \frac{\partial b(v)}{\partial v} = b(v)$$

und

$$\frac{\partial^2 \zeta(v)}{\partial v^2}(v) = \frac{\partial b}{\partial v}(v) = \left(\frac{\partial a}{\partial u}(u)\right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}(u)\right)^{-1} > 0.$$

□

Bem.: Der Zusammenhang

$$\eta(u) + \zeta(v) = u \cdot v \qquad \text{mit } v = \frac{\partial \eta}{\partial u}(u) \text{ und } u = \frac{\partial \zeta}{\partial v}(v)$$

heißt Legendre-Transformation.

Beweis des Satzes. Mit a, b, ζ wie in der Proposition und

$$\zeta_j(v) := v \cdot f_j(b(v)) - q_j(b(v))$$

gelten

$$\frac{\partial \zeta}{\partial v}(v) = u$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_j}{\partial v}(v) &= f_j(u) + v \cdot \frac{\partial f_j}{\partial u}(u) \frac{\partial b}{\partial v}(v) - \frac{\partial q_j}{\partial u}(u) \frac{\partial b}{\partial v}(v) \\ &= f_j(u) + \underbrace{\left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial f_j}{\partial u} - \frac{\partial q_j}{\partial u} \right)(u)}_{=0} \frac{\partial b}{\partial v}(v) = f_j(u). \end{aligned}$$

Also gilt der Satz mit $\varphi = \zeta, \varphi_j = \zeta_j$.

1.2.5 Lemma. *Für die Eulergleichungen sind $(-\rho s, -\rho s V)$ ein (Entropie, Entropiefluss)-Paar und*

$$\psi \equiv \frac{e + p/\rho - \frac{1}{2}|V|^2}{\theta} - s, \ \tilde{V} \equiv \frac{V}{\theta}, \ \tilde{\theta} \equiv -\frac{1}{\theta}$$

Godunov-Variablen sowie

$$\zeta = \frac{p}{\theta} \quad \textit{und} \quad \zeta_j = \frac{pV_j}{\theta}, j = 1, 2, 3,$$

Godunov-Potentiale.

Beweis. Die Bedingungen (2,i) und (2,ii) implizieren (Übungsaufgabe!), dass man die innere Energie auch als Funktion $e(\tau, s)$ des spezifischen Volumens $\tau = 1/\rho$ und der spezifischen Entropie s schreiben kann, mit der dann

$$p = p(\tau, s) = -e_\tau(\tau, s), \quad \theta = \theta(\tau, s) = e_s(\tau, s) \ \text{ und } \ D^2 e = \begin{pmatrix} e_{\tau\tau} & e_{\tau s} \\ e_{s\tau} & e_{ss} \end{pmatrix} > 0$$

sind; das werden wir ab jetzt benutzen. Aus $D^2 e(\tau, s) > 0$ folgt mit

$$S = \rho s \quad \text{und} \quad E(\rho, S) = \rho e(\tau, s)$$

dass die Gesamtenergie

$$\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}(\rho, m, S) = \frac{|m|^2}{2\rho} + E(\rho, S)$$

eine konvexe Funktion der Dichte ρ, des Impulses $m = \rho V$ und der Entropie(volumendichte) S ist,

$$D^2\tilde{\mathcal{E}} > 0.$$

Folglich ist die physikalische Entropie eine konkave Funktion der Erhaltungsgrößen ρ, m und $\mathcal{E}$,

$$S = \tilde{S}(\rho, m, \mathcal{E}) \quad \text{mit} \quad D^2\tilde{S} < 0$$

und die "mathematische Entropie "

$$\eta = -\tilde{S}(\rho, m, \mathcal{E}) \quad \text{mit} \quad D^2\eta > 0$$

wieder eine konvexe.
Mit

$$f_j = \begin{pmatrix} \rho V_j \\ \rho V_j V + p e_j \\ (\mathcal{E} + p)V_j \end{pmatrix}$$

rechnet man leicht nach, dass $q = -SV$ mit $\eta = -S$ ein Entropie-Entropiefluss-Paar im Sinne von Definition 1.2.2 bildet. Durch Differentiation der Beziehung

$$\tilde{\mathcal{E}}(\rho, m, \tilde{S}(\rho, m, \mathcal{E})) = \mathcal{E}$$

nach ρ bzw. m bzw. $\mathcal{E}$ ergeben sich die Relationen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial\rho} + \frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial S}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\rho} \\ 0 &= \frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial m} + \frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial S}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial m} \\ 1 &= \frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial S}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\mathcal{E}} \end{aligned}$$

und daraus unter Beachtung von

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial\rho} = e + p/\rho - \theta s - \frac{1}{2}|V|^2, \quad \frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial m} = V, \quad \frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial S} = \theta$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial\rho} &= \frac{e + p/\rho - \frac{1}{2}|V|^2}{\theta} - s =: \psi \\ \frac{\partial\eta}{\partial m} &= \frac{V}{\theta} =: \tilde{V} \\ \frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{E}} &= -\frac{1}{\theta} =: \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Damit folgen

$$\zeta = -\eta + \rho\frac{\partial\eta}{\partial\rho} + m\frac{\partial\eta}{\partial m} + \mathcal{E}\frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{E}} = \frac{p}{\theta}$$

und

$$\zeta_j = (\psi, \tilde{V}, \tilde{\theta}) \cdot f_j - q_j = \frac{pV_j}{\theta}.$$

$\square$

1.3 Fourier-Laplace-Moden der Euler- und der NSF-Gleichungen

Die Fourier-Laplace-Moden sind die Lösungen der Form

$$\hat{U} \exp\left(\lambda t + \sum_{j=1}^{d} \xi_j xj\right), \quad (\lambda, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^d, \tag{15}$$

der Linearisierung

$$A^0(\bar{U})U_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(\bar{U})U_{x_j} = \sum_{j,k=1}^{d} B^{jk}(\bar{U})U_{x_j x_k},$$

an einem Referenzzustand $\bar{U}$. Wegen der Galilei- und Rotationsinvarianz nehmen wir o.B.d.A. an, dass die Geschwindigkeit $\bar{V}$ für diesen Zustand den Wert 0 und der Wellenvektor die Form $\boldsymbol{\xi} = (\xi, 0, ..., 0)$ hat.

Wir betrachten zunächst die Euler-Gleichungen (1) in den Variablen ρ, V, s; bzgl. letzterer sind e, p und $\mathcal{E} = \rho e$ (bei $\bar{V} = 0$) Funktionen von ρ und s. Es sind $B^{jk}(\bar{U}) = 0$ sowie

$$A^0(\bar{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} I_2 & 0 \\ \overline{\mathcal{E}_\rho} & 0 & 0 & \overline{\mathcal{E}_s} \end{pmatrix}, \quad A^1(\bar{U}) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ \overline{p_\rho} & 0 & 0 & \overline{p_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{(\mathcal{E}+p)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Existenz einer nichttrivialen Mode (15) ist also äquivalent zum Bestehen der Dispersionsrelation

$$\begin{aligned} 0 = \Pi_E(\lambda, \boldsymbol{\xi}) &= \det\left(\lambda A^0(\bar{U}) + i\xi A^1(\bar{U})\right) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & i\xi\bar{\rho} & 0 & 0 \\ i\xi\overline{p_\rho} & \bar{\rho}\lambda & 0 & i\xi\overline{p_s} \\ 0 & 0 & \bar{\rho}\lambda I_2 & 0 \\ \lambda\overline{(\mathcal{E}+p)}/\bar{\rho} & i\xi\overline{(\mathcal{E}+p)} & 0 & \bar{\rho}\bar{\theta}\lambda \end{vmatrix} \\ &= \bar{\rho}^4\bar{\theta}\lambda^3\left(\lambda^2 + \overline{p_\rho}\xi^2\right), \end{aligned}$$

also

$$\lambda = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = \pm i c_s \xi$$

mit der Schallgeschwindigkeit

$$c_s = \sqrt{\overline{p_\rho}}.$$

Die Moden mit $\lambda \neq 0$ entsprechen Schall-, die mit $\lambda = 0$ Entropie- bzw. Vortizitätswellen; alle diese Wellen sind für Euler neutral, Re $\lambda = 0$.

Für Navier-Stokes-Fourier lautet mit

$$B^{11}(\bar{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu I_2 & 0 \\ \kappa\overline{\theta_\rho} & 0 & 0 & \kappa\overline{\theta_s} \end{pmatrix}$$

die Dispersionsrelation

$$\begin{aligned} 0 = \Pi_{NSF}(\lambda, \boldsymbol{\xi}) &= \det\left(\lambda A^0(\bar{U}) + i\xi A^1(\bar{U}) + \xi^2 B^{11}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & i\xi\bar{\rho} & 0 & 0 \\ i\xi\overline{p_\rho} & \bar{\rho}\lambda + \eta\xi^2 & 0 & i\xi\overline{p_s} \\ 0 & 0 & (\bar{\rho}\lambda + \mu\xi^2)I_2 & 0 \\ \lambda\overline{(\mathcal{E}+p)}/\bar{\rho} + \kappa\overline{\theta_\rho}\xi^2 & i\xi\overline{(\mathcal{E}+p)} & 0 & \bar{\rho}\bar{\theta}\lambda + \kappa\overline{\theta_s}\xi^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\bar{\rho}\lambda + \mu\xi^2\right)^2 \pi_{NSF}(\lambda, \xi), \end{aligned}$$

wobei

$$\pi_{NSF}(\lambda, \xi) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

mit

$$\begin{aligned} a_3 &= \bar{\rho}^2\bar{\theta} \\ a_2 &= \bar{\rho}[\kappa\overline{\theta_s} + \eta\bar{\theta}]\xi^2 \\ a_1 &= [\eta\kappa\overline{\theta_s}\xi^2 + \bar{\rho}^2\overline{p_\rho}\bar{\theta}]\xi^2 \\ a_0 &= \kappa\bar{\rho}[\overline{p_\rho}\overline{\theta_s} - \overline{p_s}\overline{\theta_\rho}]\xi^4. \end{aligned}$$

Folgendes gilt für beliebiges $\xi \neq 0$. Die doppelte Wurzel $\lambda = -(\mu\bar{\rho})\xi^2$ ist negativ. Gemäß dem Routh-Hurwitz-Kriterium haben die drei Wurzeln λ von $\pi(., \xi)$ genau dann alle negativen Realteil, wenn

$$a_2, a_1, a_0 > 0 \quad \text{und} \quad a_2a_1 - a_3a_0 > 0. \tag{16}$$

Wegen

$$p_\rho = \rho^{-2}e_{\tau\tau}, \quad -p_s = \theta_\tau = e_{\tau s}, \quad \theta_s = e_{ss}$$

und $D^2_{\tau,s}e > 0$ ist die erste Ungleichung in (16) erfüllt und folgt die zweite mit

$$\begin{aligned} a_2a_1 - a_3a_0 &= \bar{\rho}[\kappa\overline{\theta_s} + \eta\bar{\theta}][\eta\kappa\overline{\theta_s}\xi^2 + \bar{\rho}^2\overline{p_\rho}\bar{\theta}]\xi^4 - \kappa\bar{\rho}\bar{\theta}(e_{\tau\tau}e_{ss} - e^2_{\tau s})\xi^4 \\ &> \bar{\rho}\xi^4\left([\kappa\overline{e_{ss}} + \eta\bar{\theta}]e_{\tau\tau}\bar{\theta} - \kappa\bar{\theta}(e_{\tau\tau}e_{ss} - e^2_{\tau s})\right) \\ &= \bar{\rho}\xi^4\left(\eta\bar{\theta}^2e_{\tau\tau} + \kappa\bar{\theta}e^2_{\tau s})\right) \end{aligned}$$

Für NSF sind also sowohl die Entropie- und Vortizitätswellen ($\lambda \in \mathbb{R}$) als auch die Schallwellen ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) gedämpft, Re $\lambda < 0$.

1.4 Pendants der Sätze von Majda und Kawashima im linearen Fall

1.4.1 Satz. *(Majda im linearen Fall = einfachste Situation von Friedrichs 1954) Betrachte das symmetrisch hyperbolische System*

$$A^0 U_t + \sum_{j=1}^{d} A^j U_{x_j} = 0, \quad U \in \mathbb{R}^N, \tag{17}$$

mit konstanten, allesamt symmetrischen $(N \times N)$-Koeffizientenmatrizen A^0, A^j, von denen A^0 positiv definit. Mit einem festen $C > 0$ genügt dann zu Anfangsdaten $U_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ die Lösung von (21) der Abschätzung

$$\|U(t)\|_{L^2} \leq C\|U_0\|_{L^2}, \ \forall t > 0. \tag{18}$$

Beweis. Energieabschätzung: Wegen

$$\frac{d}{dt}\int_{R^d} \langle \bar{U}(t,x), A_0 U(t,x)\rangle dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_j}\langle \bar{U}(t,x), A^j U(t,x)\rangle dx = 0$$

ist

$$\int_{R^d} \langle \bar{U}(t,x), A_0 U(t,x)\rangle dx \leq \int_{R^d} \langle \bar{U}(0,x), A_0 U(0,x)\rangle dx$$

deshalb für $C > 0$ mit $C^{-1} I \leq A^0 \leq CI$:

$$\|U(t)\|_{L^2}^2 \leq C^2 \|U(0)\|_{L^2}^2. \tag{19}$$

Oder Betrachtung der Fourier-Komponenten: Diese erfüllen die GDG

$$A^0 \hat{U}_t(t,\xi) + iA(\xi)\hat{U}(t,\xi) = 0,$$

also gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \hat{U}(t,\xi), A^0 \hat{U}(t,\xi)\rangle = 0;$$

daher

$$|\hat{U}(t,\xi|^2 \leq C^2 |\hat{U}(0,\xi)|^2$$

mithin

$$\|\hat{U}(t)\|_{L^2}^2 \leq C^2 \|\hat{U}(0)\|_{L^2}^2, \tag{20}$$

also nach Plancherel wieder (19). $\square$

1.4.2 Satz. *(Kawashimas Abklingresultat im linearen Fall)*
Betrachte das symmetrisch hyperbolisch-parabolische System

$$A^0 U_t + \sum_{j=1}^{d} A^j U_{x_j} - \sum_{j,k=1}^{d} B^{jk} U_{x_j x_k} + LU = 0, \quad U(t,x) \in \mathbb{R}^N, \tag{21}$$

mit konstanten, allesamt symmetrischen $(N \times N)$-Koeffizientenmatrizen A^0, A^j, B^{jk}, L, von denen A^0 positiv definit, L positiv semidefinit und alle

$$B(\omega) = \sum_{j,k=1}^{d} \omega_j \omega_k B^{jk}, \quad \omega \in S^{d-1},$$

positiv semidefinit und von identischem Rang sind. Für alle $\omega \in S^{d-1}$ gelte

$$\forall \psi \in (ker L \cap ker B(\omega)) \setminus \{0\} : \ (\mu A^0 + A(\omega))\psi \neq 0, \ \forall \mu \in \mathbb{R}. \qquad (K)$$

Mit einem festen $C > 0$ genügt dann zu Anfangsdaten $U_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ die Lösung von (21) der Abschätzung

$$\|U(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-d/4}(\|U_0\|_{L^2} + \|U_0\|_{L^1}), \ \forall t > 0. \tag{22}$$

Beweis. Die zentrale Beobachtung ist, dass die Lösungen $\hat{U}(t,\xi)$ des Fourierkonjugierten Systems

$$A^0 \hat{U}_t(t,\boldsymbol{\xi}) = (-L - iA(\boldsymbol{\xi}) - B(\boldsymbol{\xi}))\, \hat{U}(t,\boldsymbol{\xi}) \tag{23}$$

mit einer festen Rate $-c\rho(|\boldsymbol{\xi}|)$ with

$$\rho(\xi) = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}$$

abklingen,

$$|\hat{U}(t,\boldsymbol{\xi})| \leq C \exp(-c\rho(\boldsymbol{\xi})t)|\hat{U}(0,\boldsymbol{\xi})|. \tag{24}$$

Daraus folgt

$$\|U(t)\|_{L^2}^2 \leq C^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{U}(0,\xi)|^2 \exp\left(\frac{-2c\xi^2}{1+\xi^2}t\right) d\xi,$$

und Abschätzung des Integrals in zwei Teilen,

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{U}(0,\xi)|^2 \exp\left(\frac{-2c\xi^2}{1+\xi^2}t\right) d\xi \leq C_1(1+t)^{-d/2}\|\hat{U}(0)\|_{L^\infty}^2 = C_2(1+t)^{-d/2}\|U(0)\|_{L^1}^2$$

und

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{U}(0,\xi)|^2 \exp\left(\frac{-2c\xi^2}{1+\xi^2}t\right) d\xi \leq \exp(-ct)\|\hat{U}(0)\|_{L^2}^2 = \exp(-ct)\|U(0)\|_{L^2}^2,$$

ergibt dann sofort (22). Zu zeigen bleibt (24).

Durch Übergang von $\hat{U}$ zu $\tilde{U} = S(\boldsymbol{\xi})(A^0)^{1/2}\hat{U}$ wird (23) zu

$$\tilde{U}_t(t,\boldsymbol{\xi}) = \tilde{M}(\boldsymbol{\xi})\tilde{U}(t,\boldsymbol{\xi})$$

mit

$$\tilde{M}(\boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\xi})M(\boldsymbol{\xi})S(\boldsymbol{\xi})^{-1}$$

wo

$$M(\boldsymbol{\xi}) = (A^0)^{-1/2}\left(-L - i\xi A(\boldsymbol{\xi}) - \xi^2 B(\boldsymbol{\xi})\right)(A^0)^{-1/2}.$$

Ungleichung (24) und somit Satz 1.4.2 folgen daher aus folgender Proposition. □

1.4.3 Proposition. *Unter den Bedingungen des Satzes 1.4.2 existieren ein $c > 0$ und eine Schar $\boldsymbol{\xi} \mapsto S(\boldsymbol{\xi}), \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{n\times n}$, linearer Transformationen, die samt ihrer Inversen $S(\boldsymbol{\xi})^{-1}$, gleichmäßig beschränkt sind so dass*

$$\tilde{M}(\boldsymbol{\xi}) + \tilde{M}(\boldsymbol{\xi})^* \leq -c\rho(|\boldsymbol{\xi}|)I_n. \tag{25}$$

Wir zerlegen die Aussage und den Beweis in drei Teile:

1.4.4 Lemma. *Es gibt ein $r_1 > 0$, so dass Ungleichung (25) für alle $\boldsymbol{\xi}$ mit $0 \leq |\boldsymbol{\xi}| \leq r_1$ gilt.*

1.4.5 Lemma. *Es gibt ein $r_2 > 0$, so dass Ungleichung (25) für alle $\boldsymbol{\xi}$ mit $|\boldsymbol{\xi}| \geq r_2$ gilt.*

1.4.6 Lemma. *Mit beliebigen $r_1, r_2 > 0$ gilt (25) für alle $\boldsymbol{\xi}$ mit $r_1 \leq |\boldsymbol{\xi}| \leq r_2$.*

Da die Überlegungen mit beliebigem A^0 sich von denen zum Fall

$$A^0 = I \tag{26}$$

nur durch eine zusätzliche Ähnlichkeitstransformation mit $(A^0)^{1/2}$ unterscheiden, nehmen wir ab jetzt o. B. d. A. (26) an.

Beweis von Lemma 1.4.4. O. B. d. A. nehmen wir

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{L} \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \hat{L} > 0$$

an, fixieren $\boldsymbol{\omega}$ und unterdrücken dieses Argument im Folgenden. Um eine Basistransformation $R(\xi)$ zu identifizieren, die

$$M(\xi) = -L - i\xi A - \xi^2 B = \begin{pmatrix} -i\xi A_{11} - \xi^2 B_{11} & -i\xi A_{12} - \xi^2 B_{12} \\ -i\xi A_{21} - \xi^2 B_{21} & -\hat{L} - i\xi A_{22} - \xi^2 B_{22} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} M_{11}(\xi) & M_{12}(\xi) \\ M_{21}(\xi) & M_{22}(\xi) \end{pmatrix}$$

blockdiagonalisiert,

$$R(\xi)^{-1}M(\xi)R(\xi) = \begin{pmatrix} V(\xi) & 0 \\ 0 & W(\xi) \end{pmatrix},$$

machen wir den Ansatz

$$R(\xi) = \begin{pmatrix} I & X(\xi) \\ Y(\xi) & I \end{pmatrix},$$

d. h.,

$$\begin{pmatrix} M_{11}(\xi) & M_{12}(\xi) \\ M_{21}(\xi) & M_{22}(\xi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & X(\xi) \\ Y(\xi) & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & X(\xi) \\ Y(\xi) & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V(\xi) & 0 \\ 0 & W(\xi) \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht den vier Matrixgleichungen

$$\begin{aligned} M_{11} + M_{12}Y &= V && (27)\\ M_{11}X + M_{12} &= XW && (28)\\ M_{21} + M_{22}Y &= YV && (29)\\ M_{21}X + M_{22} &= W. && (30) \end{aligned}$$

Durch Kombination von (28) mit (30) und (27) mit (29) erhalten wir die zwei Gleichungen

$$M_{11}X + M_{12} = X(M_{21}X + M_{22}) \tag{31}$$

und

$$Y(M_{11} + M_{12}Y) = M_{21} + M_{22}Y, \tag{32}$$

die nach dem Satz über implizite Funktionen für kleine Werte von ξ eindeutige glatte Funktionen $X(\xi)$ und $Y(\xi)$ mit

$$X(0) = 0, \quad Y(0) = 0$$

bestimmen. Aus diesen ergeben sich $V(\xi), W(\xi)$ durch (27) und (30). Wegen

$$W(0) = M_{22}(0) = -\hat{L},$$

macht dieser Teil bzgl. unseres Ziels (25) keine Schwierigkeiten. Angesichts von

$$V(0) = M_{11}(0) = 0,$$

müssen wir jedoch $V(\xi)$ näher untersuchen.
Differentiation der Gleichung (27) ergibt

$$V' = M_{11}' + M_{12}'Y + M_{12}Y'; \tag{33}$$

daraus folgt

$$V'(0) = M_{11}'(0) = -iA_{11}. \tag{34}$$

Differentiation der Gleichungen (32) und (33) führt zu den Relationen

$$\begin{aligned} Y'(M_{11} + M_{12}Y) + Y(M_{11} + M_{12}Y)' &= M_{21}' + M_{22}'Y + M_{22}Y',\\ V'' &= M_{11}'' + 2M_{12}'Y' + M_{12}Y''; \end{aligned}$$

diese zeigen, dass

$$Y'(0) = -(M_{22}(0))^{-1}M_{21}'(0) = -i\hat{L}^{-1}A_{12}$$

und daher

$$V''(0) = M_{11}''(0) - 2M_{12}'(0)Y'(0) = -2\tilde{B} \quad \text{mit } \tilde{B} = B_{11} + A_{12}\hat{L}^{-1}A_{21}. \tag{35}$$

Gleichungen (34) und (35) ergeben

$$V(\xi) = -i\xi A_{11} - \xi^2 \tilde{B} + O(\xi^3).$$

Betrachten wir nun

$$\mathcal{M}(\xi) = V(\xi)/\xi = i\tilde{A} - \xi\tilde{B} + O(\xi^2).$$

Um Lemma 1.4.4 zu beweisen, müssen wir nur zeigen, dass es für hinreichen kleine $\xi \geq 0$ samt ihrer Inversen gleichmäßig beschränkte Transformationen $T(\xi, \boldsymbol{\omega})$ gibt, so dass die Matrizen

$$\tilde{\mathcal{M}}(\xi, \boldsymbol{\omega}) = T(\xi, \boldsymbol{\omega}) M(\xi, \boldsymbol{\omega}) T(\xi, \boldsymbol{\omega})^{-1}$$

der Abschätzung

$$\tilde{\mathcal{M}}(\xi, \boldsymbol{\omega}) + \tilde{\mathcal{M}}(\xi, \boldsymbol{\omega})^* \leq c\xi I$$

genügen. Dies folgt jedoch aus der Proposition 1.4.7. Deren Annahme (i) ist erfüllt, da A_{11} reell symmetrisch ist. Annahme (ii) verlangt, dass jede Wirkung von

$$-\mathcal{J}^* \tilde{B} \mathcal{J}$$

von $-\tilde{B}$ auf Eigenräumen von A_{11} strikt negativ sein soll. Das ist aus den folgenden Gründen der Fall. Da $\hat{L}^{-1}$ positiv ist, wäre es genau dann nicht der Fall, wenn es einen Eigenvektor r_1 zu A_{11} gäbe, für den auch

$$A_{21} r_1 = 0 \quad \text{und} \quad B_{11} r_1 = 0 \tag{36}$$

gelten. Dann wäre jedoch

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zu A, der auch zu $\ker L$ gehört. Wegen $(36)_2$ liegt r dann auch in $\ker B$, da $B_{21} r_1 \neq 0$ einen Widerspruch zu $B \geq 0$ ergäbe. Also ist Bedingung (K) verletzt. □

Beweis des Lemmas 1.4.5. O. B. d. A. nehmen wir an, dass

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{B} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \hat{B} > 0,$$

und betrachten jetzt

$$\check{M}(\eta) = \eta^2 M(1/\eta)) = -B - i\eta A - \eta^2 L$$

Wie im vorangehenden Beweis, aber mit vertauschten Rollen von L und B, zeigen wir, dass für kleine $\eta \geq 0$ eine gleichmäßige Transformation $\check{T}(\eta, \boldsymbol{\omega})$ existiert, für die

$$\check{T}(\eta, \boldsymbol{\omega})(\check{M}(\eta, \boldsymbol{\omega}) + \check{M}(\eta, \boldsymbol{\omega})^*)\check{T}(\eta, \boldsymbol{\omega})^{-1} \leq -c\eta^2 I.$$

Mit

$$T(\xi, \boldsymbol{\omega}) = T(1/\xi, \boldsymbol{\omega}),$$

heißt das, dass für hinreichend große ξ

$$T(\xi,\boldsymbol{\omega})(M(\xi,\boldsymbol{\omega})+M(\xi,\boldsymbol{\omega})^*)T(\xi,\boldsymbol{\omega}) \le -cI.$$

Da $\rho(\infty)$ eine endliche positive Zahl ist, ist das die Behauptung. □

Beweis des Lemmas 1.4.6. Betrachte die Eigenwerte $\lambda = \lambda(\xi,\boldsymbol{\omega})$, d. h.., Lösungen von

$$(\lambda A^0 + i\xi A(\boldsymbol{\omega}) + L + \xi^2 B(\boldsymbol{\omega}))r = 0 \quad \text{mit einem } r \neq 0. \tag{37}$$

Aus Kompaktheitsgründen reicht es zu zeigen, dass

$$\text{Re }\lambda(\xi,\boldsymbol{\omega}) < 0 \quad \text{für alle } (\xi,\boldsymbol{\omega}) \in (0,\infty)\times S^{d-1}. \tag{38}$$

Da Lemmas 1.4.4 bzw. 1.4.5 die Gültigkeit dieser Ungleichung für hinreichend kleine bzw. hinreichend große $\xi > 0$ zeigen, sind wir fertig, wenn wir nachweisen, dass

$$\text{Re }\lambda(\xi,\boldsymbol{\omega}) \neq 0 \quad \text{für alle } (\xi,\boldsymbol{\omega}) \in (0,\infty)\times S^{d-1} \tag{39}$$

Nimmt man jedoch das Gegenteil an, d.h., dass (37) für gewisses $(\xi,\boldsymbol{\omega})$ mit $\lambda = i\mu, \mu \in \mathbb{R}$, gilt, so erhält man

$$0 = i\langle r, (\mu A^0 + \xi A(\boldsymbol{\omega}))r\rangle + \langle r, Lr\rangle + \langle r, \xi^2 B(\boldsymbol{\omega})r\rangle,$$

und folglich $Lr = B(\boldsymbol{\omega})r = 0$ sowie

$$(\mu A^0 + A(\xi\boldsymbol{\omega}))r = 0,$$

Eigenschaften, die zusammen einen Widerspruch zu (K) ergeben. □

1.4.7 Proposition. *Mit einer geeigneten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (offen oder differenzierbare Untermannigfaltigkeit), betrachte eine Zwei-Parameter-Schar*

$$\mathcal{M}(\xi,\boldsymbol{\omega}), \quad \xi \ge 0, \boldsymbol{\omega} \in \Omega,$$

komplexer $n \times n$-Matrizen, so dass

$$(i) \quad \mathcal{M}(0,\boldsymbol{\omega}) = i\mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}) \text{ mit } \mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ symmetrisch}, \ \boldsymbol{\omega} \in \Omega,$$

und nimm an, dass für ein gegebenes $\boldsymbol{\omega}_* \in \Omega$,

$$(ii) \quad \mathcal{J}_E^*\left(\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial\xi}(0,\boldsymbol{\omega}_*) + \left(\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial\xi}(0,\boldsymbol{\omega}_*)\right)^*\right)\mathcal{J}_E \le -\bar{c}\ \mathrm{id}_E \quad \text{mit einem festen } \bar{c} > 0,$$

wobei E die Eigenräume von $\mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}_*)$ und $\mathcal{J}_E$ ihre Einbettungen in den $\mathbb{C}^n$ sind. Dann existieren ein $\delta > 0$ und eine glatte Familie von Tansformationen

$$T(\xi,\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad (\xi,\boldsymbol{\omega}) \in P_\delta := [0,\delta) \times B_\delta^\Omega(\boldsymbol{\omega}_*),$$

so dass die transformierte Schar

$$\tilde{\mathcal{M}}(\xi,\boldsymbol{\omega}) = T(\xi,\boldsymbol{\omega})\mathcal{M}(\xi,\boldsymbol{\omega})T(\xi,\boldsymbol{\omega})^{-1}$$

mit einer festen Konstanten $c > 0$ der Abschätzung

$$\tilde{\mathcal{M}}(\xi,\boldsymbol{\omega}) + \tilde{\mathcal{M}}(\xi,\boldsymbol{\omega})^* \le -c\xi I_n, \quad (\xi,\boldsymbol{\omega}) \in P_\delta$$

genügt.

Beweis. Für $\boldsymbol{\omega}$ nahe $\boldsymbol{\omega}_*$ erlaubt uns Eigenschaft (i), anhand einer ersten orthogonalen Transformation anzunehmen, dass

$$\mathcal{M}(0,\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} M_1^0(\boldsymbol{\omega}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_L^0(\boldsymbol{\omega}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\mathcal{A}_1(\boldsymbol{\omega}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & i\mathcal{A}_L(\boldsymbol{\omega}) \end{pmatrix}$$

mit reellen symmetrischen Matrizen $\mathcal{A}_l, l = 1,\ldots,L$, der Form

$$\mathcal{A}_l(\boldsymbol{\omega}_*) = \alpha_l I_{n_l}, \quad l = 1,\ldots,L,$$

wobei $\alpha_1,\ldots,\alpha_L$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $\mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}_*)$ und $n_1,\ldots,n_L$ deren Vielfachheiten sind.
Für hinreichend kleines $\delta > 0$ impliziert die spektrale Trennung die Existenz einer glatten Familie

$$T : P_\delta \to \mathbb{C}^{n\times n}, (\xi,\boldsymbol{\omega}) \mapsto T(\xi,\boldsymbol{\omega})$$

von Basistransformationen, so dass

$$\tilde{\mathcal{M}}(\xi,\boldsymbol{\omega}) = T(\xi,\boldsymbol{\omega})\mathcal{M}(\xi,\boldsymbol{\omega})T(\xi,\boldsymbol{\omega})^{-1} = \begin{pmatrix} M_1(\xi,\boldsymbol{\omega}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_J(\xi,\boldsymbol{\omega}) \end{pmatrix} \tag{40}$$

mit Blöcken $M_l(\xi,\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{C}^{n_l\times n_l},\ l = 1,\ldots,L$, und

$$T(0,\boldsymbol{\omega}_*) = I_n,$$

d.h..,

$$M_l(0,\boldsymbol{\omega}) = M_l^0(\boldsymbol{\omega}), \quad l = 1,\ldots,L.$$

Bemerke nun, dass

$$\frac{\partial M_l}{\partial \xi}(0,\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{J}_l^* \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \xi}(0,\boldsymbol{\omega})\mathcal{J}_l, \quad l = 1,\ldots,L, \tag{41}$$

mit

$$\mathcal{J}_l = \begin{pmatrix} 0_{n_l^-\times n_l} \\ I_{n_l} \\ 0_{n_l^+\times n_l} \end{pmatrix}, \quad \text{where } n_l^- = \sum_{s<l} n_s,\ n_l^+ = \sum_{s>l} n_s.$$

Um (41) zu erkennen, betrachte die verschobene Schar

$$\mathcal{M}_l(\xi,\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{M}(\xi,\boldsymbol{\omega}) - i\alpha_l I_n.$$

Differentiation von (40) bzgl. ξ ergibt

$$M_l' = \mathcal{J}_l^* \left(T\mathcal{M}T^{-1}\right)' \mathcal{J}_l = \mathcal{J}_l^* \left(T\mathcal{M}_l T^{-1}\right)' \mathcal{J}_l = \mathcal{J}_l^* \left(T'\mathcal{M}_l S^{-1} + T(\mathcal{M}_l)'T^{-1} + T\mathcal{M}_l(T^{-1})'\right) \mathcal{J}_l,$$

wo wir $\partial/\partial\xi$ als $'$ abgekürzt haben. Auswertung bei $\xi = 0$ führt zu

$$\frac{\partial M_l}{\partial \xi}(0,\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{J}_l^* \frac{\partial \mathcal{M}_l}{\partial \xi}(0,\boldsymbol{\omega})\mathcal{J}_l = \mathcal{J}_l^* \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \xi}(0,\boldsymbol{\omega})\mathcal{J}_l.$$

Das heißt aber, dass

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{M}}}{\partial \xi}(0,\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1^* \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \xi}(0,\boldsymbol{\omega})\mathcal{J}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathcal{J}_L^* \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \xi}(0,\boldsymbol{\omega})\mathcal{J}_L \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\tilde{\mathcal{M}}(\xi,\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} i\mathcal{A}_1(\boldsymbol{\omega}) + \xi \mathcal{J}_1^* \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \xi}(0,\boldsymbol{\omega})\mathcal{J}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & i\mathcal{A}_l(\boldsymbol{\omega}) + \xi \mathcal{J}_L^* \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \xi}(0,\boldsymbol{\omega})\mathcal{J}_L \end{pmatrix} + O(\xi^2).$$

$\square$

2 Hyperbolische Modelle der dissipativen Fluiddynamik

2.1 Vorüberlegung: NSF in Godunov-Variablen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X^0(\Upsilon)}{\partial \Upsilon}\right)+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial X^j(\Upsilon)}{\partial \Upsilon}\right)=I(\Upsilon) \tag{1}$$

mit

$$\Upsilon=(\tilde{\psi},\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{\Sigma},\tilde{\sigma},\tilde{q}) \tag{2}$$

wobei

$$\tilde{\psi}\equiv\psi-\frac{u^2/2}{\theta},\ \tilde{u}\equiv\frac{u}{\theta},\ \tilde{\theta}=-\frac{1}{\theta},\ \tilde{\Sigma}\equiv\frac{\Sigma}{\theta},\ \tilde{\sigma}\equiv\frac{\sigma}{\theta},\ \tilde{q}\equiv\frac{q}{\theta^2} \tag{3}$$

mit $\tilde{\psi},\tilde{u},\tilde{\theta}$ wie zuvor und $\Sigma\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch spurfrei, $\sigma\in\mathbb{R}, q\in\mathbb{R}^3$.
Godunov-Boillat- Potentiale

$$X^0=\frac{p}{\theta},\quad X^j=((pI+\theta(\tilde{\Sigma}+\tilde{\sigma}I))\tilde{u})^j+\theta\tilde{q}^j \tag{4}$$

mit

$$p=\hat{p}\left(\theta,\psi\right); \tag{5}$$

Quellterm

$$I=\left(0_1,0_3,0_1,-\frac{\Sigma}{\eta},-\frac{\sigma}{\zeta},-\frac{q}{\chi}\right). \tag{6}$$

2.1.1 Satz. *(Ruggeri 1983.) Gleichungen (1) mit (2)–(6) sind die NSF-Gleichungen, geschrieben als symmetrisches, aber entartetes und nicht hyperbolisches System: D^2X^0 ist nur positiv semidefinit, nicht definit.*

Beweis: Nachrechnen, beginnend mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X^0}{\partial\tilde{\psi}}&=\frac{\hat{p}_\psi}{\theta} & \frac{\partial X^j}{\partial\tilde{\psi}}&=\hat{p}_\psi\tilde{u}^j\\
\frac{\partial X^0}{\partial\tilde{u}_m}&=\hat{p}_\psi\tilde{u}^m & \frac{\partial X^j}{\partial\tilde{u}_m}&=\hat{p}_\psi\theta\tilde{u}^m\tilde{u}^j+(\hat{p}+\theta\tilde{\sigma})\delta^{mj}+\theta\tilde{\Sigma}^{mj}\\
\frac{\partial X^0}{\partial\tilde{\theta}}&=-\hat{p}+\theta\hat{p}_\theta+\frac{1}{2}\hat{p}_\psi\theta|\tilde{u}|^2 & \frac{\partial X^j}{\partial\tilde{\theta}}&=\theta^2\left(\left(\left(\hat{p}_\theta+\frac{1}{2}\hat{p}_\psi\theta|\tilde{u}|^2\right)I+(\tilde{\Sigma}+\tilde{\sigma}I)\right)\tilde{u}+\tilde{q}\right)^j\\
\frac{\partial X^0}{\partial\tilde{\Sigma}_{kl}}&=0 & \frac{\partial X^j}{\partial\tilde{\Sigma}_{kl}}&=\theta C^{ijkl}\tilde{u}_i\\
\frac{\partial X^0}{\partial\tilde{\sigma}}&=0 & \frac{\partial X^j}{\partial\tilde{\sigma}}&=\theta\tilde{u}^j\\
\frac{\partial X^0}{\partial\tilde{q}_m}&=0 & \frac{\partial X^j}{\partial\tilde{q}_m}&=\theta\delta^{mj},
\end{aligned}$$

wo

$$C^{ijkl}:=\delta^{ik}\delta^{jl}+\delta^{il}\delta^{jk}-\frac{2}{3}\delta^{kl}\delta^{ij}.$$

Bemerkung: Setzt man in diesen Gleichungen η,ζ,χ und Σ,σ,q alle $=0$, ist man wieder bei Euler.

2.2 Ruggeris Modell

Statt $p = \hat{p}(\theta, \psi)$ betrachtet man die Erweiterung ("extension")

$$p = \hat{p}\left(\theta, \psi + \Psi(\tilde{\Sigma}, \tilde{\sigma}.\tilde{q})\right). \tag{7}$$

2.2.1 Satz. *(Ruggeri 1983.) Wenn Ψ strikt konvex ist, $D^2\Psi > 0$, ist (1) mit (2)–(6), aber (7) anstelle von (5), ein symmetrisch-hyperbolisches System. Insbesondere ist dann $D^2 X^0$ positiv definit.*

Beweis. Nachrechnen, beginnend mit

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X^0}{\partial \tilde{\psi}} &= \frac{\hat{p}_\psi}{\theta} & \frac{\partial X^j}{\partial \tilde{\psi}} &= \hat{p}_\psi \tilde{u}^j \\
\frac{\partial X^0}{\partial \tilde{u}_m} &= \hat{p}_\psi \tilde{u}^m & \frac{\partial X^j}{\partial \tilde{u}_m} &= \hat{p}_\psi \theta \tilde{u}^m \tilde{u}^j + (\hat{p} + \theta\tilde{\sigma})\delta^{mj} + \theta\tilde{\Sigma}^{mj} \\
\frac{\partial X^0}{\partial \tilde{\theta}} &= -\hat{p} + \theta\hat{p}_\theta + \frac{1}{2}\hat{p}_\psi \theta |\tilde{u}|^2 & \frac{\partial X^j}{\partial \tilde{\theta}} &= \theta^2 \left(\left(\left(\hat{p}_\theta + \frac{1}{2}\hat{p}_\psi \theta |\tilde{u}|^2\right) I + (\tilde{\Sigma} + \tilde{\sigma} I)\right) \tilde{u} + \tilde{q}\right)^j \\
\frac{\partial X^0}{\partial \tilde{\Sigma}_{kl}} &= \frac{\hat{p}_\psi}{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\Sigma}_{kl}} & \frac{\partial X^j}{\partial \tilde{\Sigma}_{kl}} &= \theta\left(C^{ijkl}\tilde{u}_i + \frac{\hat{p}_\psi}{\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\Sigma}_{kl}} \tilde{u}^j\right) \\
\frac{\partial X^0}{\partial \tilde{\sigma}} &= \frac{\hat{p}_\psi}{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\sigma}} & \frac{\partial X^j}{\partial \tilde{\sigma}} &= \theta\left(1 + \frac{\hat{p}_\psi}{\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\sigma}}\right)\tilde{u}^j \\
\frac{\partial X^0}{\partial \tilde{q}_m} &= \frac{\hat{p}_\psi}{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{q}_m} & \frac{\partial X^j}{\partial \tilde{q}_m} &= \theta\left(\delta^{mj} + \frac{\hat{p}_\psi}{\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{q}_m}\tilde{u}^j\right),
\end{aligned}
$$

□

"Bemerkung": Interessanter Spezialfall ist

$$\Psi(\tilde{\Sigma}, \tilde{\sigma}, \tilde{q}) = \frac{1}{2}\left(\tau_1 \tilde{\Sigma} : \tilde{\Sigma} + \tau_2 \tilde{\sigma}^2 + \tau_3 |q|^2\right). \tag{8}$$

In dieser Erweiterung spielen die Konstanten $\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0$ die Rolle von Relaxationszeiten. Im Grenzfall $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ ist $\Psi \equiv 0$ und man wieder bei NSF zurück.

2.3 Momentensysteme nach Levermore

(Dieser Abschnitt stellt eine Verbindung zur kinetischen Theorie her.)