

Analysis IV

Topologie/Normierte Vektorräume/Lebesgue-Integral

Inhaltsverzeichnis

(Stand: 30. Juli 2003)

Teil I: Topologie

0	Vorbemerkungen und erste Beispiele	1
	Normierte (und halbnormierte) Vektorräume, metrische (und semimetrische) Räume; die Räume ℓ_p ; Ungleichungen von HÖLDER, MINKOWSKI und JENSEN	
1	Topologie semimetrischer Räume	5
2	Topologische Grundbegriffe	7
	Inneres, abgeschlossen, Hülle, ‚Dualität‘, Rand, Häufungspunkte,...	
3	Filter	10
	Filter, Filterbasen, Bild, FRÉCHET-Filter, Ultrafilter, lokale Basen; Basen	
4	Stetigkeit und Konvergenz	12
	Beschreibung durch Filter, Zurückführung auf Basen (Subbasen), Vergleich von Topologien	
5	Initiale Topologien	15
	Spezialfälle: Urbild-, Spur-, Produkt- und erzeugte Topologie	
6	Finale Topologien	20
	Spezialfälle: Quotienten-, Summen-, Infimum-Topologie	
7	Offene Abbildungen und Homöomorphismen	22
8	Vollständigkeit	22
	CAUCHY-Folgen, Durchmesser; $\ell_\infty(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$, $C_b(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$, Beispiele; Fortsetzung gleichmäßig stetiger Abbildungen; Vervollständigung	
9	Fixpunktsatz für Kontraktionen	28
	Anwendung auf lineare Gleichungssysteme (JACOBI-Verfahren) und FREDHOLM-Integralgleichungen	
10	Der Satz von Baire	31
	nirgends dicht, mager (von 1. Kategorie), von 2. Kategorie; BAIRE-Räume, Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Existenz stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen	

11	Separabilität	34
	Zusammenhang mit abzählbarer Basis, Beispiele	
12	Kompaktheit	36
	Grundeigenschaften, Beschreibung durch Filterbasen; die Begriffe ‚abzählbar-kompakt‘, ‚FRÉCHET-kompakt‘ (BOLZANO-WEIERSTRASS-Eigenschaft), ‚folgenkompakt‘, Durchschnittseigenschaft; Satz von LINDELÖF; ‚Totalbeschränktheit‘ in semimetrischen Räumen	
13	Der Satz von TYCHONOFF	44
	Halbgeordnete Mengen, Ketten; Lemma von ZORN; Ultrafiltersatz; Beschreibung von Kompaktheit durch Ultrafilter; Satz von TYCHONOFF	
14	Zusammenhang	46
	Äquivalente Beschreibungsweisen und Grundeigenschaften; Zusammenhangskomponenten; ‚total-unzusammenhängend‘, ‚lokal-zusammenhängend‘	

Teil II: Normierte Vektorräume und lineare Abbildungen

15	Definition und Grundeigenschaften	50
16	Lineare Abbildungen (‚Operatoren‘)	52
	Charakterisierung der Stetigkeit linearer Abbildungen; Norm-Isomorphismen und Isomorphismen (von normierten Vektorräumen); Äquivalenz von Normen; Abbildungsnorm (Operatornorm); der Raum $L(E_1, E_2)$; Dualräume; Normierte \mathbb{K} -Algebren (mit Eins), BANACH-Algebren	
17	Reihen in normierten Vektorräumen	57
	Definition, Sprech- und Schreibweisen; kleiner Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen; Charakterisierung der Vollständigkeit durch Reihen; Einheitengruppe, ‚NEUMANN-Reihe‘; unbeschränkte Operatoren der Quantenmechanik	
18	Endlich-dimensionale normierte Vektorräume	62
19	Quotienten- und Produkträume	64
20	‚Der‘ Satz von HAHN-BANACH	66
	Allgemeine Form für beliebige \mathbb{R} -Vektorräume, Satz von HAHN-BANACH-BOHNENBLUST-SOBCZYK-SUHOMLINOV, Folgerungen, BANACH-Limes als Anwendungsbeispiel	
21	Bidualraum, Reflexivität und Vervollständigung	70
22	Uniform boundedness principle; Satz von BANACH-STEINHAUS ..	71
	Uniform boundedness theorem; Satz von BANACH-STEINHAUS; Quadraturformeln als Anwendungsbeispiel, speziell Sätze von SZEGÖ und STEKLOV	

23	Open mapping principle; closed graph theorem	75
	Open mapping principle, Satz vom inversen Operator, Graphen-abgeschlossene Abbildungen, closed graph theorem, direkte Summen und Projektoren	
24	Schwache Topologien; Satz von ALAOGU	78
	Schwache Topologien (Initiale Topologien), totale Teilmengen, Beschreibung der schwachen Konvergenz; für normierte Vektorräume: Normtopologie, schwache Topologie und schwach*-Topologie; Beziehung zur Produkttopologie, Satz von ALAOGU; $\sigma(\Gamma)$ -Beschränktheit	
25	HILBERTräume	83
	Semi-Skalarprodukte und Skalarprodukte; Orthogonalität, Orthonormalsysteme, BESSEL-Ungleichung, Parallelogrammgleichung und Polarisierungsformeln; Prä-HILBERTräume und HILBERTräume, Vervollständigung; Proximum (‚Minimallösung‘ oder ‚Element bester Approximation‘), Beschreibung des Proximums; Orthogonalraum, direkte Summe, Beschreibung durch Projektoren, Anmerkung zum ‚Satz von HAHN-BANACH‘ für HILBERTräume, Satz von RIESZ; Orthonormalbasen: Summierbarkeit, FOURIER-Entwicklung, PARSEVAL-Gleichung	

Teil III: Lebesgue-Integral

	Einleitung	94
26	Prä-Ringe, Maße, elementare Integrale	94
27	Verallgemeinertes LEBESGUE-Integral	96
	LEBESGUE-Integralnorm, Nullmengen und Nullfunktionen, Konvergenzsätze (Erster, LEVI, FATOU, LEBESGUE) Vollständigkeitssatz, Charakterisierung von Konvergenz bezüglich $\ \cdot \ $	
28	Verallgemeinertes LEBESGUE-Maß	102
	Meßbare Mengen, LEBESGUE-Maß, lokal-meßbare Mengen äußeres Maß, ...	

Fehlerlisten, Verbesserungsvorschläge, Anregungen und Kritik werden ‚jederzeit‘ dankbar entgegengenommen!