0 Vorbemerkungen und erste Beispiele

Die Objekte, mit denen wir uns im zweiten Teil dieser Vorlesung hauptsächlich beschäftigen werden, sind **Normierte Vektorräume**. Es sei ‚immer' $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:

Definition

$X := (X, a, s, \| \; \|)$ *„Normierter Vektorraum" („NVR") über* $\mathbb{K} :\Longleftrightarrow$
(X, a, s) *Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *und* $\| \; \|$ *„Norm" auf* X*, d. h.:*

(N0) $\| \; \| \colon X \ni x \longmapsto \|x\| \in [0, \infty[$ *mit*

(N1) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (für $x, y \in X$ *und* $\alpha \in \mathbb{K}$)

Ohne Forderung (N1)*: „Halbnorm", „Halbnormierter Vektorraum" („HNVR")*

Zur Erinnerung:

$X = (X, a, s)$ *„Vektorraum" („VR", linearer Raum) über* $\mathbb{K} :\Longleftrightarrow$
X *nicht-leere Menge und*

$$a \colon X \times X \ni (x, y) \longmapsto x + y \in X$$
$$s \colon \mathbb{K} \times X \ni (\alpha, x) \longmapsto \alpha x \in X \quad \textit{mit}$$

(A1) *a assoziativ*

(A2) *a kommutativ*

(A3) $\dot{\exists}\, 0 \in X \quad \forall\, x \in X \quad x + 0 = x$

(A4) $\forall\, x \in X \quad \dot{\exists}\, y \in X \quad x + y = 0$ (Bezeichnung: $y =: -x$)

(SK1) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(SK2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(SK3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(SK4) $1x = x$ (für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$)

Das ‚Rechnen' und die üblichen Bezeichnungen im VR werden als bekannt vorausgesetzt.

0.1 Bemerkung

Vor.: X *HNVR*

Beh.: $\|0\| = 0$

$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\| \qquad (\dots)$

Beweis: □□□ □

0.2 Bemerkung

Vor.: X *HNVR*

Bez.: $\delta(x, y) := \|x - y\| \qquad (\dots)$

Beh.: *a)* (X, δ) *semimetrischer Raum,*

b) *Falls* X *NVR:* (X, δ) *metrischer Raum;* dabei:

Definition

$(\mathfrak{R}, \varrho)$ *„semimetrischer Raum" („SMR",* ϱ *„Semimetrik" auf* $\mathfrak{R}$*)*

$:\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{R}$ *nicht-leere Menge und* $\varrho\colon \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \ni (x, y) \longmapsto \varrho(x, y) \in [0, \infty[$ *mit*

$$\begin{aligned} \varrho(x, x) &= 0 \\ \varrho(x, y) &= \varrho(y, x) && \textit{(‚Symmetrie')} \\ \varrho(x, z) &\leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \quad (\dots) && \textit{(‚Dreiecksungleichung')} \end{aligned}$$

($\varrho(x, y)$ *„Abstand zwischen* x *und* y*")*

$(\mathfrak{R}, \varrho)$ *„metrischer Raum" („MR",* ϱ *„Metrik" auf* $\mathfrak{R}$*)*

$:\Longleftrightarrow$ $(\mathfrak{R}, \varrho)$ *SMR* $\wedge \big[\varrho(x, y) = 0 \implies x = y\big] \quad (\dots)$ *(‚Definitheit')*

Beweis der Bemerkung 0.2: □□□ □

$\big\langle$Anmerkung zu ‚Pseudometriken' □□□$\big\rangle$

Beispiele

(B1) $\mathbb{K}$ ist (mit üblicher Addition, Multiplikation und Betrag) *NVR*

(B2) $\mathbb{K}^n$ $(\dots)$, $\|x\|_\infty := \max\limits_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \quad \big(x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\big)$ *NVR*

(B3) $\mathbb{K}^n$ $(\dots)$, $\|x\|_2 := \Big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2\Big)^{1/2} \quad \big(x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\big)$ *NVR*

(B4) $\mathbb{K}^n$ $(\dots)$, $\|x\|_1 := \sum\limits_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \quad \big(x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\big)$ *NVR*

(B5) $-\infty < a < b < \infty$, $\mathrm{C}^{\mathbb{K}}[a,b] := \big\{ f \mid f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} \text{ stetig} \big\}$ (Addition und Multiplikation mit Skalaren ‚punktweise'), $\|h\|_s := \max\limits_{x \in [a,b]} |h(x)|$: *NVR*

(B6) $\mathfrak{R}$ nicht-leere Menge, $\delta(x,y) := \begin{cases} 0\,, & x = y \\ 1\,, & x \neq y \end{cases}$: $(\mathfrak{R}, \delta)$ MR (δ *„diskrete Metrik"*)

(B7) $(\mathfrak{R}, \delta)$ SMR und $\varphi\colon [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ mit
$\varphi(0) = 0$ und $t \leq t_1 + t_2 \implies \varphi(t) \leq \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$ $(\dots)$
Beh.: $(\mathfrak{R}, \varphi \circ \delta)$ SMR

(B7') $(\mathfrak{R}, \delta)$ MR und φ wie oben mit $\big[\varphi(t) = 0 \implies t = 0\big]$, dann $(\mathfrak{R}, \varphi \circ \delta)$ MR

Beweise: (B1) – (B5): aus A I, A II bekannt ((B3) wird im folgenden Abschnitt noch einmal mitbewiesen.)
(B6): ◻◻◻ (B7): ◻◻◻ (B7'): nur noch Definitheit zu zeigen: ✓ ◻

Anwendung von (B7'):

$$(\mathfrak{R}, \delta) \text{ MR}, \quad \sigma(x,y) \;:=\; \frac{\delta(x,y)}{1 + \delta(x,y)} \quad (\dots) \implies (\mathfrak{R}, \sigma) \text{ MR}$$

Beweis:

$$\varphi(t) \;:=\; \frac{t}{1+t} \quad \big(t \in [0,\infty[\,\big): \; s \leq t \implies \varphi(s) \;\leq\; \varphi(t) \quad (\Longleftrightarrow \; s + st \leq t + st)$$

$$\varphi(s+t) \;=\; \frac{s+t}{1+s+t} \;=\; \frac{s}{\dots} + \frac{t}{\dots} \;\leq\; \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t} \;=\; \varphi(s) + \varphi(t) \quad (\dots)$$ ◻

Die Räume ℓ_p

Für $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\|x\|_p \;:=\; \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p \right)^{1/p}.$$

0.3 Bemerkung $\|\;\|_p$ *ist eine Norm auf dem* $\mathbb{K}^n$.

Beweis: (N0), (N1), (N2): ✓ Für den Beweis von (N3) zeigen wir zunächst die

Hölder-Ungleichung *Für* $1 < p < \infty$, $q := \dfrac{p}{p-1}$ *(also* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*) gilt:*

(H) $\|xy\|_1 \;\leq\; \|x\|_p \, \|y\|_q \qquad \big(x, y \in \mathbb{K}^n\big)$

Beweis: Die Funktion log ist (streng) konkav $\big($da ihre Ableitung $(x \longmapsto \frac{1}{x})$ (streng) antiton ist$\big)$: $\log(ab) = \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \le \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$ für $a, b > 0$; also

$$(*) \qquad \boxed{ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}},$$

was natürlich auch für $a = 0$ oder $b = 0$ richtig ist.

Für den *Beweis der* HÖLDER-*Ungleichung* seien nun Œ $\|x\|_p > 0$ und $\|y\|_q > 0$:

$$\frac{\|xy\|_1}{\|x\|_p\,\|y\|_q} = \sum_{\nu=1}^n \frac{|x_\nu|}{\|x\|_p}\frac{|y_\nu|}{\|y\|_q} \overset{(*)}{\le} \sum_{\nu=1}^n\Big(\frac{1}{p}\frac{|x_\nu|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_\nu|^q}{\|y\|_q^q}\Big) \overset{\checkmark}{=} 1 \qquad \square$$

Beweis von (N3): Œ $1 < p < \infty$:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p &= \sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^p \le \sum |x_\nu + y_\nu|^{p-1}|x_\nu| + \sum |x_\nu + y_\nu|^{p-1}|y_\nu| \\ &\overset{(H)}{\le} \Big(\sum |x_\nu + y_\nu|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}\|x\|_p + \Big(\dots\Big)^{1/q}\|y\|_p \\ &= \|x+y\|_p^{p/q}\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \quad \Longrightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p} \qquad \textbf{(Minkowski-Ungleichung)} \qquad \square$$

Bezeichnung Für $1 \le p \le \infty$ heißt $1 \le q \le \infty$ genau dann *„konjugiert"* zu p, wenn $q = 1$, falls $p = \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, falls $1 < p < \infty$, und $q = \infty$, falls $p = 1$.
$\big($Mit $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\big)$

0.4 Bemerkung (Hölder-Ungleichung)

> *Für $1 \le p \le \infty$ und q konjugiert zu p gilt:*
>
> $$\|xy\|_1 \le \|x\|_p\,\|y\|_q \qquad \left(x, y \in \mathbb{K}^n\right)$$

Beweis: Nach (H) bleibt (Œ) $p = 1$, $q = \infty$: ✓ $\square$

Für $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ $\big(x =: (x(n)) =: (x_n)\big)$ entsprechend

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{\nu=1}^\infty |x_\nu|^p\Big)^{1/p}, \text{ falls } 1 \le p < \infty, \text{ und}$$

$$\|x\|_\infty := \sup_{\nu\in\mathbb{N}} |x_\nu|\,.$$

Damit für $1 \le p \le \infty$:

$$\ell_p := \ell_p(\mathbb{K}) := \left\{\alpha \mid \alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \wedge \|\alpha\|_p < \infty\right\}$$

0.5 Bemerkung

> *Für* $1 \le p \le \infty$ *und* q *konjugiert zu* p *gilt:*
>
> $$x \in \ell_p \ \wedge \ y \in \ell_q \implies xy \in \ell_1 \ \wedge \ \|xy\|_1 \le \|x\|_p \, \|y\|_q$$

Beweis: Für $z\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $z^{(n)} = (z_1, \ldots, z_n) \quad (\in \mathbb{K}^n)$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu y_\nu| = \|x^{(n)} y^{(n)}\|_1 \overset{(0.4)}{\le} \|x^{(n)}\|_p \, \|y^{(n)}\|_q \le \|x\|_p \, \|y\|_q \quad (\implies \text{Behauptung}) \qquad \square$$

0.6 Bemerkung $\left(\ell_p, \| \ \|_p\right)$ *ist ein NVR.*

Beweis: Für $p = \infty$: ✓; für $1 \le p < \infty$ z. B. wie Beweis zu (0.5) aus (0.3). $\square$

0.7 Bemerkung (Jensen-Ungleichung)

> $1 \le r \le s \le \infty \implies \ell_r \subset \ell_s \ \wedge \ \|x\|_s \le \|x\|_r$ *für* $x \in \ell_r$

Beweis: 1. Fall: $s = \infty$: ✓ 2. Fall: Œ $r < s < \infty$ und $0 < \|x\|_s$:

$$\|x\|_s^s = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^s = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^r \, |x_\nu|^{s-r} \le \|x\|_r^r \, \|x\|_\infty^{s-r} \overset{\text{1. Fall}}{\le} \|x\|_r^r \, \|x\|_r^{s-r} = \|x\|_r^s \qquad \square$$

1 Topologie semimetrischer Räume

Es sei $(\mathfrak{R}, \delta)$ SMR.

1.1 Bemerkung $\left|\delta(a,b) - \delta(x,y)\right| \le \delta(a,x) + \delta(b,y) \quad (\ldots)$

Beweis: □□□ $\square$

1.2 Bemerkung $|\delta(a,b) - \delta(a,y)| \le \delta(b,y) \quad (\ldots)$

Für $\varepsilon \in \,]0, \infty[$ und $a \in \mathfrak{R}$ bezeichnen wir

$U_a^\varepsilon := \left\{x \in \mathfrak{R} : \delta(a,x) < \varepsilon\right\}$ „*Umgebung von* a *mit Radius* ε“,

$K_a^\varepsilon := \left\{x \in \mathfrak{R} : \delta(a,x) \le \varepsilon\right\}$ „*Kugel um* a *mit Radius* ε“,

speziell K_a^1 als „*Einheitskugel*“ (um a).

$\mathfrak{R} \supset O$ „*offen*“ $:\iff \forall\, x \in O \quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad U_x^\varepsilon \subset O$

$\mathbb{O} := \mathbb{O}(\delta) := \{O \mid \mathfrak{R} \supset O \text{ offen}\} \qquad \big($‚Immer‘ $\delta \longmapsto \mathbb{O}(\delta)\ldots\big)$

1.3 Satz

(O1)	$\mathbb{O} \supset \mathbb{O}_1 \implies \bigcup\limits_{\mathbb{O}_1} O \in \mathbb{O}$	*(in Worten: □□□)*
(O2)	$\mathbb{O} \supset \mathbb{O}_2$ *endlich* $\implies \bigcap\limits_{\mathbb{O}_2} O \in \mathbb{O}$	*(in Worten: □□□)*
(O1')	$\emptyset \in \mathbb{O}$	
(O2')	$\mathfrak{R} \in \mathbb{O}$	

Beweis: (O1), (O1'), (O2'): ✓ (O2): mit $U_x^{\varepsilon_1} \cap U_x^{\varepsilon_2} = U_x^{\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$: □□□ □

1.4 Bemerkung *Für* $x \in \mathfrak{R}$ *und* $\varepsilon > 0$: $U_x^\varepsilon \in \mathbb{O}$

Beweis: $y \in U_x^\varepsilon \implies U_y^{\varepsilon-\delta(y,x)} \subset U_x^\varepsilon$ □

Definition $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *„topologischer Raum“ („TR“)*

$:\iff$ $\mathfrak{R}$ *nicht-leere** *Menge und* $\mathbb{O} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{R})$ *mit* (O1), (O2), (O1'), (O2')

(1.3) besagt also: *Jeder SMR ist* (in ‚kanonischer Weise‘) *TR.*

Es sei jetzt $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ TR.

Für $O \subset \mathfrak{R}$: $O \in \mathbb{O} \iff: O$ *„offen“*;
$\mathbb{O}$ die *„Topologie“* von $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$;
Für $x \in \mathfrak{R}$ und $U \subset \mathfrak{R}$: U *„Umgebung von x“* $:\iff \exists\, O \in \mathbb{O} \quad x \in O \subset U$
$\mathbb{U}_x := \big\{ U \mid \mathfrak{R} \supset U$ Umgebung von $x \big\}$ (*„Umgebungssystem“* von x)

1.5 Satz *Für* $x \in \mathfrak{R}$ *gelten:*

(U0)	$\mathbb{U}_x \neq \emptyset$
(U1)	$\forall\, U \in \mathbb{U}_x \quad x \in U$
(U2)	$\forall\, U_1, U_2 \in \mathbb{U}_x \quad U_1 \cap U_2 \in \mathbb{U}_x$
(U3)	$\mathbb{U}_x \ni U \subset V \subset \mathfrak{R} \implies V \in \mathbb{U}_x$
(U4)	$\forall\, U \in \mathbb{U}_x \quad \exists\, V \in \mathbb{U}_x \quad \forall\, y \in V \quad U \in \mathbb{U}_y$

Beweis: (U0), (U1), (U3): ✓ (U2) nach (O2); (U4): Zu U existiert $O \in \mathbb{O}$ mit $x \in O \subset U$: $V := O$ tut's. □

* etwas kommentieren ...

1.6 Bemerkung *Für* $\mathfrak{R} \supset O: \quad O \in \mathbb{O} \iff \forall\, x \in O \quad O \in \mathbb{U}_x$ *(in Worten: □□□)*

Beweis: Nach Übung (1.5) oder wie folgt:
$\Longrightarrow$: nach Definition Umgebung;
$\Longleftarrow$: Zu $x \in O$ existiert $O_x \in \mathbb{O}$ so, daß $x \in O_x \subset O$: $\quad O = \bigcup_{x \in O} O_x \in \mathbb{O}$ □

Gilt zusätzlich noch

$$\text{(U5)} \quad \forall\,(x,y) \in \mathfrak{R}^2 \quad \big[x \neq y \implies \exists\, U \in \mathbb{U}_x \quad \exists\, V \in \mathbb{U}_y \quad U \cap V = \emptyset\big],$$

dann heißt $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ „Hausdorff–*Raum*“ *(„HdR“)* oder *„T_2–Raum“*.

1.7 Bemerkung

$$(\mathfrak{R}, \delta)\ \textit{SMR},\ \mathfrak{R} \supset U, x \in \mathfrak{R}: \quad U \in \mathbb{U}_x \iff \exists\, \varepsilon > 0 \quad U_x^\varepsilon \subset U$$

Beweis:
$\Longleftarrow$: nach (1.4);
$\Longrightarrow$: Ist $U \in \mathbb{U}_x$, dann existiert $O \in \mathbb{O}$ mit $x \in O \subset U$,
dazu existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_x^\varepsilon \subset O\ (\subset U)$ □

1.8 Bemerkung

$$(\mathfrak{R}, \delta)\ \textit{SMR}: \quad (\mathfrak{R}, \delta)\ \textit{MR} \iff (\mathfrak{R}, \mathbb{O}(\delta))\ \textit{HdR}$$

Beweis: □□□ □

2 Topologische Grundbegriffe

Es sei $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ TR. $\big($‚Immer‘: $\mathbb{O} \longmapsto \mathbb{U} =: \mathbb{U}(\mathbb{O})\big)$
Für $A \subset \mathfrak{R}, x \in \mathfrak{R}$:

$$\mathring{A} := \big\{z \in \mathfrak{R} \mid A \in \mathbb{U}_z\big\} \qquad (\text{„}\textit{Inneres}\text{“ von } A)$$
$$x \in \mathring{A} \iff: x\ \text{„}\textit{innerer Punkt}\text{“ von } A$$

2.1 Bemerkung

a) $A \supset \mathring{A} \in \mathbb{O}$

b) $\mathring{A} = \bigcup_{A \supset O \in \mathbb{O}} O \quad \big(\mathring{A}$ *ist die größte offene Menge in A*$\big)$

c) $\big(A = \mathring{A} \iff\big) \quad A \subset \mathring{A} \iff A \in \mathbb{O}$

d) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$

e) $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \qquad (A, B \subset \mathfrak{R})$

f) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^\circ$

Beweise:

a): nach (U1): $\overset{\circ}{A} \subset A$; für $x \in \overset{\circ}{A}$ gilt $A \in \mathbb{U}_x$; nach (U4) existiert $V \in \mathbb{U}_x$ mit $A \in \mathbb{U}_y$ für alle $y \in V$, also $V \subset \overset{\circ}{A}$, daher $\overset{\circ}{A} \in \mathbb{U}_x$, somit (man vergleiche 1.6) $\overset{\circ}{A} \in \mathbb{O}$.

b): $\subset$: nach a); $\supset$: Für $A \supset O \in \mathbb{O}$ (nach (1.6)): $\forall\, x \in O \quad A \in \mathbb{U}_x :\ O \subset \overset{\circ}{A}$

c): $\Longrightarrow$: nach a); $\Longleftarrow$: nach b)

d): nach a) und c)

e): $\subset$: ✓ $\supset$: $A \cap B \supset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \in \mathbb{O} \overset{\text{b)}}{\Longrightarrow} (A \cap B)^\circ \supset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

f): ✓ $\big[\mathfrak{R} = \mathbb{R}, A := \mathbb{Q}, B := \widetilde{A}$ zeigen, daß ℓ.S. $=\emptyset \wedge$ r.S. $= \mathfrak{R}$ möglich ist.$\big]$ □

$$\mathbb{A} := \big\{F \mid F \subset \mathfrak{R} \wedge \widetilde{F} \in \mathbb{O}\big\} \qquad \big(\text{‚Immer‘:}\quad \mathbb{O} \longmapsto \mathbb{A} =: \mathbb{A}(\mathbb{O})\big)$$

Für $A \subset \mathfrak{R}$: $A \in \mathbb{A} \iff: A$ *„abgeschlossen“*

$$\overline{A} := \big\{x \in \mathfrak{R} :\ \forall\, U \in \mathbb{U}_x \quad U \cap A \neq \emptyset\big\} \quad \big(\text{(abgeschlossene) „}\textit{Hülle}\text{“ von } A\big)$$

Für $x \in \mathfrak{R}$: $x \in \overline{A} \iff: x$ *„Berührungspunkt“* zu A

Die Eigenschaften offener Mengen ‚übersetzen‘ sich zu:

2.2 Bemerkung

(A1) $\mathbb{A} \supset \mathbb{A}_1 \Longrightarrow \bigcap_{\mathbb{A}_1} F \in \mathbb{A}$ *(in Worten: □□□)*

(A2) $\mathbb{A} \supset \mathbb{A}_2$ *endlich* $\Longrightarrow \bigcup_{\mathbb{A}_2} F \in \mathbb{A}$ *(in Worten: □□□)*

(A1') $\mathfrak{R} \in \mathbb{A}$

(A2') $\emptyset \in \mathbb{A}$

Die folgende Bemerkung erlaubt es, (2.1) zu ‚übersetzen‘ *(„Dualität“)*:

2.3 Bemerkung

$$\boxed{\overline{A} = \widetilde{\mathring{\widetilde{A}}} \qquad \left(\mathring{A} = \widetilde{\overline{\widetilde{A}}}\right)}$$

Beweis: zu zeigen: $\widetilde{\overline{A}} = \mathring{\widetilde{A}}$:

$x \in \ell.\text{S.} \iff \exists\, U \in \mathbb{U}_x \;\; U \cap A = \emptyset \;\; \big(\text{also } U \subset \widetilde{A}\big)$

$\iff \widetilde{A} \in \mathbb{U}_x \iff x \in \text{r.S.}$ $\square$

2.4 Bemerkung

a) $A \subset \overline{A} \in \mathbb{A}$

b) $\overline{A} = \bigcap\limits_{A \subset F \in \mathbb{A}} F \qquad \big(\overline{A}$ *ist die kleinste* A *umfassende abgeschlossene Menge.*$\big)$

c) $\big(A = \overline{A} \iff\big) \quad A \supset \overline{A} \iff A \in \mathbb{A}$

d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (\dots)$

f) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Beweis: ‚direkt' oder aus (2.1) mit (2.3) ablesen:

z. B. a): nach (2.1.a) $\widetilde{A} \supset \mathring{\widetilde{A}} \in \mathbb{O}$, also $A \subset \widetilde{\mathring{\widetilde{A}}} \in \mathbb{A}$, mit (2.3) Behauptung. $\square$

Das gleiche Beispiel wie zu (2.1.f) zeigt, daß auch hier — in f) — nicht „=" gilt.

Für $A \subset \mathfrak{R}, x \in \mathfrak{R}$:

$$\partial A := \big\{z \in \mathfrak{R} \,|\, \forall U \in \mathbb{U}_z \quad U \cap A \neq \emptyset \,\wedge\, U \cap \widetilde{A} \neq \emptyset\big\} \quad (\text{„}\textit{Rand}\text{“ von } A)$$

$$x \in \partial A :\iff x \text{ „}\textit{Randpunkt}\text{“ zu } A$$

2.5 Bemerkung

a) $\partial A = \partial \widetilde{A}$

b) $\partial A = \left(\mathring{A} \uplus \mathring{\widetilde{A}}\right)^{\sim} = \overline{A} \cap \overline{\widetilde{A}} \qquad (\Longrightarrow \partial A \in \mathbb{A})$

c) $\mathfrak{R} = \mathring{A} \uplus \partial A \uplus \mathring{\widetilde{A}}$

d) $\overline{A} = \mathring{A} \uplus \partial A$

e) $A \in \mathbb{A} \iff \partial A \subset A$

Beweis: a): nach Definition

b): $\uplus$: ✓ 2. Gleichung nach (2.3); $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\widetilde{A}}$: nach Definition

c): nach b)

d): $\overline{A} = \widetilde{\overset{\circ}{\widetilde{A}}} \overset{c)}{=} \overset{\circ}{A} \uplus \partial A$

e): $A \in \mathbb{A} \iff \overline{A} \subset A \overset{d)}{\iff} \partial A \subset A$ $\square$

$$\text{Für } A \subset \mathfrak{R}: \quad \dot{A} := \left\{ z \in \mathfrak{R} : z \in \overline{A \setminus \{z\}} \right\},$$

$$x \in \dot{A} \iff: x \text{ „\textit{Häufungspunkt}“ zu } A$$

2.6 Bemerkung *a)* $\dot{A} \setminus A = \partial A \setminus A$

b) $\overline{A} = A \cup \dot{A}$

c) $A \in \mathbb{A} \iff \dot{A} \subset A$

Beweis:

a): $\subset$: $x \in \ell.\text{S.} \implies \forall U \in \mathbb{U}_x \quad U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \wedge x \in \widetilde{A}$

$\implies \forall U \in \mathbb{U}_x \quad U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap \widetilde{A} \neq \emptyset$, also $x \in \partial A$

$\supset$: $\partial A \setminus A \overset{(2.5.d)}{\subset} \overline{A} \setminus A \overset{!}{\subset} \dot{A}$: □□□

b): $\subset$: nach „!“,

$\supset$: $A \subset \overline{A}$ nach (2.4.a), $z \in \dot{A} \implies z \in \overline{A \setminus \{z\}} \subset \overline{A}$

c): $A \in \mathbb{A} \overset{(2.4.c)}{\iff} \overline{A} \subset A \overset{b)}{\iff} \dot{A} \subset A$ $\square$

3 Filter

In A I und A II konnten viele topologische Begriffe durch Folgenkonvergenz beschrieben werden. Dies ist entsprechend auch für semimetrische Räume möglich. Für allgemeine topologische Räume ist Folgenkonvergenz kein geeignetes Hilfsmittel (man vergleiche z. B. Übung (2.3)). Hier ist (z. B.) der von H. CARTAN eingeführte Filter-Begriff angemessen:

Es sei $\mathfrak{R}$ eine nicht-leere Menge.

Bezeichnung $\mathbb{P}'(\mathfrak{R}) := \mathbb{P}(\mathfrak{R}) \setminus \{\emptyset\}$ (Menge der nicht-leeren Teilmengen von $\mathfrak{R}$)