Teil III

Lebesgue-Integral*

* Wir betrachten *klassische Maße* und *BR-wertige Funktionen.*

Einleitung

In Analysis I bis III haben wir schon verschiedenartige einfache Integralbegriffe für reell- oder komplexwertige Funktionen behandelt und dabei eine allgemeine Methodik der Integralfortsetzung bereitgestellt.
Bei dem Übergang von Funktionen einer reellen Variablen auf Funktionen, die auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert sind, also für die mehrdimensionale Analysis, traten an die Stelle der Intervalle in $\mathbb{R}$ Rechtecke, Quader, eben mehrdimensionale ‚Intervalle'. Für die zugehörigen Integrale übernahm dann das Produkt der ‚Kantenlängen' die Rolle der Intervall-Länge.
Es ist nun zweckmäßig, hier sogleich weiter zu verallgemeinern und innerhalb einer *beliebigen Grundmenge* geeignete Mengensysteme und zugehörige ‚Inhalte' zu betrachten. Dies bringt ein hohes Maß an Übersichtlichkeit und vermeidet es, in verschiedenartigen Situationen immer wieder ähnliche Überlegungen anzustellen. Dieser Verallgemeinerungsschritt wird es gestatten, Situationen wie die genannten mehrdimensionalen Integrale, Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Reihenlehre — und natürlich vieles andere mehr — als Spezialfälle einzuordnen.
Neben diesem ganz einfachen Abstraktionsschritt, lassen wir jetzt auch *allgemeinere Wertebereiche* zu. Wir bleiben dagegen — in dieser kurzen Darstellung — bei der Betrachtung nicht-negativer ‚Maße'.
Das bisher betrachtete RIEMANN-Integral zeigte gravierende Mängel im Zusammenhang mit der Betrachtung von Grenzprozessen bezüglich der Funktionen. So muß nicht einmal dann, wenn die RIEMANN-integrierbaren Funktionen f_n eine gemeinsame Schranke besitzen und die Träger in einem festen kompakten Intervall liegen, ein existierender punktweiser Limes f wieder RIEMANN-integrierbar sein: Standardbeispiel ist die charakteristische Funktion der Menge der rationalen Zahlen aus $[0, 1]$ als punktweiser Limes charakteristischer Funktionen endlicher Mengen. Auch ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum der RIEMANN-integrierbaren Funktionen bezüglich der Integralnorm $\| \; \|$, die wir eingeführt hatten, nicht *vollständig*.
Auch die Beziehungen zwischen Nullmengen, Null-$*$-Mengen und Nullfunktionen war im bisherigen Rahmen, besonders hinsichtlich der Möglichkeit entsprechend weitgehender Abänderung von Funktionen ohne Veränderung von Integrierbarkeit und Integral, nicht so einfach, wie dies wünschenswert wäre.
Allen diesen Wünschen genügt nun das LEBESGUE-*Integral*, das in den bisher betrachteteten Fällen das uneigentliche RIEMANN-Integral umfaßt und *den* Integralbegriff für das analytische Arbeiten darstellt. Wir erhalten ein viel leistungsfähigeres Integral, vor allem eine Reihe sehr starker *Konvergenzsätze.*

26 Prä-Ringe, Maße, elementare Integrale

Annahmen $\mathfrak{R}$ nicht-leere Menge; $\mathbb{I}$ *Prä-Ring* über $\mathfrak{R}$,
d. h.: $\emptyset \neq \mathbb{I} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{R}) \;\wedge\; \forall\, A, B \in \mathbb{I}\ \exists\, \mathbb{T}$ (endlich, $\subset \mathbb{I}$) $\;A \setminus B = \biguplus_{T \in \mathbb{T}} T$,
$\mu\colon \mathbb{I} \longrightarrow [0, \infty[$ (klassisches) *Maß*,
d. h.: $\forall\, (A_n) \in \mathbb{I}^{\mathbb{N}_0}\quad \Big[A_0 = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu(A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\Big]$,
$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathfrak{B}$ $\mathbb{K}$-BR.*

Wichtige **Beispiele:**

(B1) $\mathfrak{R} = \mathbb{R}$, $\mathbb{I} := \{\text{beschränkte Intervalle}\}$, μ Intervall-Länge

(B2) $\mathfrak{R} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{I} := \{\text{beschränkte Rechtecke}\}$, μ Flächeninhalt

(B2') $n \in \mathbb{N}$; $\mathfrak{R} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{I} := \{$‚Quader'$\}$, μ Produkt der ‚Kantenlängen'

(B3) Wahrscheinlichkeitsräume

(B4) $\mathfrak{R}$ beliebige nicht-leere Menge; $\mathbb{I} := \big\{\{x\} : x \in \mathfrak{R}\big\} \cup \{\emptyset\}$
$\mu(\emptyset) := 0$, $\mu(\{x\}) := 1 \;\; (x \in \mathfrak{R})$
Hiermit kann die *Reihenlehre* (BR-wertiger Folgen) einbezogen werden.

$\mathfrak{F} := \mathfrak{F}(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) \;\big(:= \big\{f \mid f\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{B}\big\}\big)$ (mit punktweise definierten Verknüpfungen) $\mathbb{K}$-*VR*

$\mathfrak{E} := \mathfrak{E}(\mathfrak{B}) := \mathfrak{E}(\mathfrak{R}, \mathbb{I}, \mathfrak{B}) := \Big\{\sum_{\nu=1}^{n} \chi_{A_\nu} a_\nu : A_\nu \in \mathbb{I}, a_\nu \in \mathfrak{B};\ n \in \mathbb{N}\Big\}$ *UR von* $\mathfrak{F}$

$$\left(\text{Dabei}\quad \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0 & x \in \mathfrak{R} \setminus A \end{cases} \quad \text{für } A \subset \mathfrak{R}\right)$$

Die Funktionen aus $\mathfrak{E}$ heißen *„elementare"* oder *„einfache Funktionen"*. Mit den gelegentlich herangezogenen *„einfachsten Funktionen"*

$$\mathfrak{E}_0 := \mathfrak{E}_0(\mathfrak{B}) := \mathfrak{E}_0(\mathfrak{R}, \mathbb{I}, \mathfrak{B}) := \Big\{\chi_A\, a \mid A \in \mathbb{I}, a \in \mathfrak{B}\Big\}$$

ist $\mathfrak{E}$ gerade die *lineare Hülle von* $\mathfrak{E}_0$.

Für $h \in \mathfrak{E}$ gilt $|h| \in \mathfrak{E}(\mathbb{R})$. Der Unterraum $\mathfrak{E}(\mathbb{R})$ ist also auch abgeschlossen gegen die Bildung endlicher Suprema und Infima.

Durch

$$i\left(\sum_{\nu=1}^{n} \chi_{A_\nu} a_\nu\right) := \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)\, a_\nu$$

---

* Für die ersten Überlegungen benötigt man nur einen VR, dann zunächst nur einen NVR.

(Rechtfertigung: □□□) ist

$$i_{\mathfrak{B}} := i\colon \mathfrak{E} \longrightarrow \mathfrak{B} \quad \textit{linear} \quad (\textit{„elementares Integral“})$$

gegeben mit

$$\left|i(h)\right| \leq i_{\mathbb{R}}(|h|)\,.$$

i ist eindeutig bestimmt durch die Werte auf $\mathfrak{E}_0$:

$$i(\chi_A a) = \mu(A)a \quad \text{für } A \in \mathbb{I} \text{ und } a \in \mathfrak{B}$$

Das System $R(\mathbb{I})$ der endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathbb{I}$ ist ein *‚Mengen-Ring', d. h. abgeschlossen gegen Bildung von Vereinigungen und Differenzen und damit Durchschnitten von je zwei Mengen und so von Vereinigungen und Durchschnitten endlich vieler Mengen,*

Man bestätigt noch sofort:

$R(\mathbb{I})$ ist der kleinste $\mathbb{I}$ umfassende Ring. Die Mengen aus $R(\mathbb{I})$ sind genau diejenigen, deren charakteristische Funktionen in $\mathfrak{E}(\mathbb{R})$ liegen. $R(\mathbb{I})$ besteht genau aus den Trägermengen der Funktionen aus $\mathfrak{E}$.

Die Integraldefinition liefert auch die *eindeutige Existenz einer Fortsetzung des Maßes μ auf $\mathbb{I}$ zu einem Maß auf $R(\mathbb{I})$*. Wir bezeichnen dieses der Einfachheit halber auch wieder mit μ.

27 Verallgemeinertes Lebesgue-Integral

Unter den **Annahmen** aus dem vorangehenden Abschnitt bezeichnen wir für eine beliebige Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{F}(\mathfrak{R},\mathbb{R})$ mit

$$\mathfrak{A}^+ := \left\{f \in \mathfrak{A} \mid f \geq 0\right\}$$

die Menge der nicht-negativen Funktionen aus $\mathfrak{A}$.

Für $f \in \mathfrak{F}$ sei — nur abhängig von $|f|$, unabhängig von $\mathfrak{B}$ —

$$\|f\| := \|f\|_L := \inf\left\{\sup i_{\mathbb{R}}(\varphi_n) : (\varphi_n) \in \mathfrak{E}^{+\mathbb{N}} \wedge \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq \sup_n \varphi_n \geq |f|\right\}$$

mit $\inf \emptyset := \infty$; damit

$$\mathfrak{I} := \mathfrak{I}(\mathfrak{B}) := \mathfrak{I}(\mathfrak{R},\mathbb{I},\mathfrak{B}) := \overline{\mathfrak{E}(\mathfrak{R},\mathbb{I},\mathfrak{B})}^{\|\ \|}\,.$$

Gemäß (8.6) läßt sich $i = i_{\mathfrak{B}}$ eindeutig auf $\mathfrak{I}$ *stetig fortsetzen* zu

$$\bar{\imath} := \overline{i_{\mathfrak{B}}}\colon \mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{B}\,.$$

Funktionen aus $\mathfrak{I}$ heißen *„LEBESGUE-integrierbar“* und $\bar{\imath}$ *„LEBESGUE-Integral“*. $\bar{\imath}$ *ist linear, und es gilt*

① $$|f| \in \mathfrak{I}(\mathbb{R}) \ \ \textit{und} \ \ \big|\bar{\imath}(f)\big| \ \le \ \bar{\imath}_{\mathbb{R}}(|f|) \ = \ \|f\| \ \ \textit{für} \ \ f \in \mathfrak{I}(\mathfrak{B})\,.$$

Man zeigt dazu: $\|\ \|$ ist eine *„starke Integralnorm“*, die zur Fortsetzung des elementaren Integrals i *„geeignet“* ist, d. h. :

$$\|\ \| \colon \mathfrak{F} \longrightarrow [0,\infty] \ \ \textit{mit}$$

$$\|0\| = 0$$

$$|f| \le \sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu| \implies \|f\| \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\| \qquad \text{„abzählbar subadditiv“ oder „}\sigma\text{-subadditiv“}$$

$$\|\alpha\, f\| = |\alpha|\, \|f\| \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

$$\big|i(h)\big| \le \|h\| \qquad \text{für } h \in \mathfrak{E}$$

Es gilt sogar: $\big|i(h)\big| \le i_{\mathbb{R}}\big(|h|\big) \ = \ \|h\|$ für $h \in \mathfrak{E}$.

Statt der *endlichen* Subadditivität der RIEMANN-DARBOUX-Integralnorm (in den uns bekannten Spezialfällen aus A I und A II) gilt also hier schärfer die σ-Subadditivität.

Wir bezeichnen $\|\ \|_L$ als *„LEBESGUE-Integralnorm“*.

Wir vermerken, daß offenbar

$$\|\ \|_L \le \|\ \|_R$$

gilt, so daß die gewohnte Vergleichsüberlegung das LEBESGUE-*Integral* als *Fortsetzung des* RIEMANN-*Integrals* erweist.

Zunächst betrachten wir wieder — jetzt bezüglich der LEBESGUE-Integralnorm — *Nullfunktionen*, also solche, deren Integralnorm 0 ist, und *Nullmengen*, also solche, deren charakteristische Funktion Nullfunktion ist. Auf den ersten Blick überraschend — im Vergleich zu den bisherigen Integralbegriffen — erscheinen die Eigenschaften:

Jede Funktion, deren Betrag durch eine abzählbare Summe von Nullfunktionen majorisiert ist, ist selbst Nullfunktion.

Jede Teilmenge einer abzählbaren Vereinigung von Nullmengen ist selbst Nullmenge.

Eine Funktion ist Nullfunktion genau dann, wenn ihr Träger Nullmenge ist.

Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der σ-Subadditivität. Die zweite ergibt sich direkt aus der ersten. Für die dritte notiert man mit $M := \operatorname{Tr} f$ die beiden Ungleichungen

$$\chi_M \le |f| + |f| + \cdots\,, \quad |f| \le \chi_M + \chi_M + \cdots\,,$$

aus denen man mit der σ-Subadditivität der Integralnorm beide Implikationen abliest.

In diesem Zusammenhang wollen wir hier sogleich für einen oft auftretenden Sachverhalt eine kurze und bequeme Sprechweise einführen. Gilt eine Eigenschaft für alle x

aus $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme einer Nullmenge ($\emptyset$ ist natürlich zugelassen), so sagen wir: sie gilt *„fast überall“*. Entsprechend verwenden wir auch die Redeweisen *„fast überall auf M“* oder *„für fast alle x aus M“*, falls ausgedrückt werden soll, daß die Menge der Ausnahmestellen, hier natürlich eine Teilmenge von M, eine Nullmenge ist. Als Abkürzung setzen wir hinter entsprechende Aussagen auch einfach *„f. ü.“*.
Auf diese Weise können wir etwa formulieren:

Gilt $f(x) = g(x)$ f. ü. für zwei Funktionen f, g aus $\mathfrak{F}$, so haben sie gleiche Integralnorm. Ist dabei f integrierbar, so auch g, und die Integralwerte sind gleich.

Zum *Beweis* ist nur zu bedenken, daß $\operatorname{Tr}(f-g)$ eine Nullmenge und nach obiger Bemerkung also $f-g$ eine Nullfunktion ist. Eine solche ist aber integrierbar mit Integralnorm und Integralwert 0. □

Wie wir dies schon eben getan haben, werden wir in diesem Abschnitt statt „LEBESGUE-integrierbar“ und „LEBESGUE-Integral“ kurz *„integrierbar“* und *„Integral“* sagen.

Mit Hilfe einfacher Schlußweisen erhalten wir nun im Folgenden eine Reihe sehr starker Konvergenzsätze und verwandter Aussagen, deren Fehlen bei den früheren Integralbegriffen wir schon mehrfach betont haben:

Erster Konvergenzsatz:

Sind f_n beliebige Funktionen aus $\mathfrak{F}$ und gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\| < \infty,$$

so ist die Reihe der Funktionen selbst,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x),$$

fast überall absolut konvergent und somit konvergent. Ist mit einer Funktion f

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) = f(x) \quad \text{f. ü.},$$

so gilt

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu - f \right\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ist nämlich M die Menge der Stellen, wo absolute Konvergenz nicht gilt, so hat man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\chi_M \le \sum_{\nu=n}^{\infty} |f_\nu|,$$

also wegen der σ-Subadditivität der Integralnorm

$$\|\chi_M\| \le \sum_{\nu=n}^{\infty} \|f_\nu\| .$$

Nach Voraussetzung konvergiert die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0. Also ist M, wie behauptet, Nullmenge. Für die zweite Aussage können wir f schon so abgeändert annehmen, daß $f(x)$ genau die Reihensumme ist, falls die Reihe in x absolut konvergiert. Dann hat man offenbar

$$\left| f - \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \right| \le \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |f_\nu| ,$$

also mit der σ-Subadditivität von $\| \ \|_L$ die Behauptung. □

Indem wir dies auf integrierbare Funktionen spezialisieren, haben wir den

Konvergenzsatz von LEVI:

Sind die Funktionen f_n integrierbar und gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} i_{\mathbb{R}}(|f_n|) < \infty ,$$

so ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

fast überall absolut konvergent. Gilt für eine Funktion f aus $\mathfrak{F}$ fast überall

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x),$$

so ist f integrierbar, und man kann gliedweise integrieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\imath_{\mathfrak{B}}}(f_n) = \overline{\imath_{\mathfrak{B}}}(f) .$$

Beweis: In $\mathfrak{I}$ stimmen Integralwerte der Beträge und Integralnormen überein. Daher ist nur noch zu bemerken, daß die Partialsummen und damit f in $\mathfrak{I}$ liegen. Dann gibt die Integralabschätzung ① die letzte Behauptung. □

Eine einfache Folgerung — für $\mathfrak{B} := \mathbb{R}$ — ist der

Konvergenzsatz von LEVI II (für isotone Folgen):

Sind die reellwertigen *Funktionen f_n integrierbar, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x) \qquad \text{f. ü.},$$

und ist die Folge der Integralwerte der f_n beschränkt, dann ist für fast alle x die Folge der Funktionswerte $f_n(x)$ konvergent (in $\mathbb{R}$). Ist f eine Funktion mit

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad \text{f. ü.},$$

so ist f integrierbar, und man hat

$$\overline{\imath_{\mathbb{R}}}(f_n) \longrightarrow \overline{\imath_{\mathbb{R}}}(f)\,.$$

Zum *Beweis* kann man vereinfachend die abzählbar vielen Ausnahmemengen zu *einer* Nullmenge zusammenfassen und auf dieser die Funktionen f_n und f zu 0 abändern. Das ändert Integrierbarkeit und Integrale nicht, und alle Voraussetzungen gelten jetzt *überall.* Man schreibt dann zu

$$\sum_{n=1}^{N}(f_{n+1}-f_n) \;=\; f_{N+1}-f_1$$

um und wendet hierauf den Konvergenzsatz von LEVI an, wobei man beachtet, daß die aufgeschriebenen Differenzenfunktionen nicht-negativ sind. Damit ist der Beweis gegeben. □

Trivial ist die **Bemerkung:**

Im Konvergenzsatz von LEVI II *kann überall ‚$\leq$' durch ‚$\geq$' ersetzt werden.*

Als leichte Anwendung erhalten wir — für $\mathfrak{B} := \mathbb{R}$ — den

Satz von FATOU:

Sind die rellwertigen *Funktionen f_n integrierbar und nicht-negativ und ist*

$$\liminf \overline{\imath_{\mathbb{R}}}(f_n) \;<\; \infty\,,$$

so ist

$$\liminf f_n(x) \;<\; \infty \qquad \text{f. ü.}\,.$$

Ist f aus $\mathfrak{F}$ mit

$$f(x) \;=\; \liminf f_n(x) \qquad \text{f. ü.},$$

so ist f integrierbar und es gilt

$$\overline{\imath_{\mathbb{R}}}(f) \;\leq\; \liminf \overline{\imath_{\mathbb{R}}}(f_n)\,.$$

Zum *Beweis* betrachtet man die Funktionen

$$g_n \;:=\; \inf\{f_\nu \,:\, \nu \geq n\},$$

die man als nicht-negative Limites der antitonen Folgen integrierbarer Funktionen

$$g_{n,m} \;:=\; f_n \wedge f_{n+1} \wedge \cdots \wedge f_m \qquad (m = n,\, n+1,\, \cdots)$$

darstellen kann und so über die obige Bemerkung als integrierbar erkennt. Man hat

$$g_n \leq f_n.$$

Somit stellen die g_n eine offenbar isotone Folge integrierbarer Funktionen dar, die beschränkte Integralwerte haben. So ist noch einmal der Satz von LEVI II anwendbar, und nach Voraussetzung konvergieren die $g_n(x)$ fast überall gegen $f(x)$. So ist also f integrierbar und es gilt

$$\overline{\imath_{\mathbb{R}}}(f_n) \geq \overline{\imath_{\mathbb{R}}}(g_n) \longrightarrow \overline{\imath_{\mathbb{R}}}(f).$$

Das zeigt auch die letzte Behauptung. □

Eine allgemeine und zentrale Aussage über *‚majorisierte Konvergenz'* liefert der

Konvergenzsatz von LEBESGUE:

Vor.: $f \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})$; $f_n \in \mathfrak{I}(\mathfrak{B})$; $g \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}, \mathbb{R})$ *mit* $\|g\| < \infty$,
$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *f. ü.*; $|f_n(x)| \leq g(x)$ *f. ü.*
Beh.: $f \in \mathfrak{I}(\mathfrak{B})$, $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$, $\overline{\imath_{\mathfrak{B}}}(f_n) \longrightarrow \overline{\imath_{\mathfrak{B}}}(f)$

Einen *Beweis* hierzu lassen wir aus Zeitgründen weg.

Fast direkte Folgerung aus dem ‚Ersten Konvergenzsatz' ist der

Vollständigkeitssatz:

$\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{I}$ sind bezüglich $\| \ \|$ „vollständig".

Zum *Beweis* — in schon vertrauter Schlußweise — wählt man zu einer gegebenen CAUCHY-Folge (f_n) eine Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ derart, daß

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \|f_{n_{\kappa+1}} - f_{n_\kappa}\| \text{ endlich ist.}$$

Nach dem ‚Ersten Konvergenzsatz' existiert eine Funktion $g \in \mathfrak{F}$ mit

$$\left\| \sum_{\kappa=1}^{k-1} (f_{n_{\kappa+1}} - f_{n_\kappa}) - g \right\| \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty);$$

für $f := f_{n_1} + g$ hat man also

$$\|f_{n_k} - f\| \longrightarrow 0 \text{ und } f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x) \text{ f. ü.} \quad (k \to \infty).$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich dann wegen der Voraussetzung, daß (f_n) eine CAUCHY-Folge ist,

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Liegen die f_n speziell alle in $\mathfrak{I}$, so liegt auch f in $\mathfrak{I}$. □

Im Zusammenhang mit dieser Beweistechnik notieren wir noch die folgende

Charakterisierung von Konvergenz bezüglich $\| \;\|$:

Innerhalb $\mathfrak{F}$ gilt $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$ genau dann, wenn $\|f_n - f_m\| \longrightarrow 0$ und eine Teilfolge (f_{n_ν}) existiert, die punktweise fast überall gegen f konvergiert.

Zum *Beweise* der einen Richtung gehen wir von $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$ aus. Dann folgt, wie üblich, die CAUCHY-Konvergenz $\|f_n - f_m\| \longrightarrow 0$ mit der Dreiecksungleichung. Nach den zuvor notierten Überlegungen gibt es nun eine Teilfolge, die fast überall gegen eine Funktion g konvergiert, wobei andererseits $\|f_n - g\| \longrightarrow 0$ gilt. Die Dreiecksungleichung erweist dann $f - g$ als Nullfunktion, die Trägermenge als Nullmenge. Also konvergiert die Teilfolge auch fast überall gegen f. — Für die andere Richtung kann man mit den obigen Argumenten ohne Einschränkung annehmen, daß schon die ursprüngliche Folge fast überall gegen f konvergiert. Nach dem schon Bewiesenen gibt es eine Funktion g derart, daß $\|f_n - g\| \longrightarrow 0$ gilt und eine Teilfolge fast überall gegen g konvergiert. Damit ist aber wieder $f - g$ eine Nullfunktion, also gilt $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$.□

28 Verallgemeinertes Lebesgue-Maß

Schon in A II haben wir — im dort gegebenen Spezialfall — die mit der Integralerweiterung verbundene Fortsetzung eines Inhalts untersucht und so den JORDAN-Inhalt gewonnen.
Im Folgenden betrachten wir die Inhaltserweiterung im Zusammenhang mit dem verallgemeinerten LEBESGUE-Integral. Dies führt uns in die Theorie des LEBESGUE-*Maßes*, die für viele Fragen der Analysis, der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik grundlegende Bedeutung hat.
Zugleich mit Integralerweiterungen hat man jeweils Fortsetzungen des auf $\mathbb{I}$ bzw. $R(\mathbb{I})$ gegebenen Inhalts μ: Man hat nur die Integrale entsprechender charakteristischer Funktionen zu betrachten. Dies gibt im Spezialfall die Definition von Flächeninhalten oder Volumina im Zwei- und Dreidimensionalen. Inhalte (bzw. Maße) ergeben sich so als einfaches Nebenprodukt der Integral-Fortsetzung. Dies steht im Gegensatz zu vielen Darstellungen von Integrationstheorien, die zuerst gewisse Fortsetzungen von Inhalten (oder Maßen) ausgiebig beschreiben und darauf erst später — relativ umständlich — die Einführung von Integralen begründen. Hier genügt also für beides *ein* einfacher Fortsetzungsschritt.

Wir gehen also aus von einem Prä-Ring $\mathbb{I}$ innerhalb einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$ und — gemäß den Überlegungen des vorangehenden Abschnittes — von einem klassischen *Maß* μ auf $\mathbb{I}$. Dazu bilden wir, wie eben dargestellt, mit Hilfe der LEBESGUE-Integralnorm $\| \;\|$ das (verallgemeinerte) LEBESGUE-Integral $i := \overline{\imath_{\mathbb{R}}}$ auf dem Raum der LEBESGUE-integrierbaren Funktionen $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathbb{R})$.

Wir betrachten das System der *meßbaren Mengen*

$$\mathbb{M} := \left\{ M \subset \mathfrak{R} : \chi_M \in \mathfrak{I} \right\}$$

und die durch

$$\mu(M) := i(\chi_M)$$

definierte Mengenfunktion

$$\mu\colon \mathbb{M} \longrightarrow [0, \infty[\,.$$

$\mathbb{M}$ ist ein Ring, der $R(\mathbb{I})$ umfaßt. μ ist ein klassisches Maß, das das gegebene Maß auf $\mathbb{I}$ fortsetzt.

Beweis: Daß $\mathbb{M}$ den Ring $R(\mathbb{I})$ umfaßt und μ das gegebene Maß auf $\mathbb{I}$ fortsetzt, folgt aus unmittelbar aus den Definitionen. Für die Ring-Eigenschaft hat man nur

$$\chi_{M\cup N} = \chi_M \vee \chi_N\,, \quad \chi_{M\setminus N} = \chi_M - \chi_M \wedge \chi_N$$

zu beachten. Dabei sei daran erinnert, daß aus ① (Abschnitt 27) folgt:

$$f,\, g \in \mathfrak{I}(\mathbb{R}) \Longrightarrow f \vee g,\, f \wedge g \in \mathfrak{I}(\mathbb{R})$$

Für die Maß-Eigenschaft haben wir Mengen M_n und M in $\mathbb{M}$ zu betrachten derart, daß M die disjunkte Vereinigung der abzählbar vielen Mengen M_n ist. Man schreibt um zu

$$\chi_M = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{M_n}\,.$$

Dies ist nach Definition von $\mathbb{M}$ eine Relation mit integrierbaren nicht-negativen Funktionen. Man kann zum Beispiel den Satz von LEVI anwenden und erhält

$$\mu(M) = i(\chi_M) = \sum_{n=1}^{\infty} i(\chi_{M_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n)\,. \qquad \square$$

Wir bezeichnen μ auf $\mathbb{M}$ als *(verallgemeinertes)* „LEBESGUE-*Maß*“.

Von besonderer Bedeutung sind im gegebenen Zusammenhang diejenigen Mengen in $\mathfrak{R}$, deren Durchschnitte mit allen Mengen des Prä-Ringes $\mathbb{I}$ meßbar sind. Wir bezeichnen diese als *„lokal-meßbar“* und definieren also

$$\mathbb{L} := \{\, M \subset \mathfrak{R} : \forall A \in \mathbb{I} \;\; A \cap M \in \mathbb{M} \,\}\,.$$

Natürlich hat man, da $\mathbb{M}$ ein $\mathbb{I}$ umfassender Ring ist,

$$\mathbb{M} \subset \mathbb{L}\,.$$

Betrachtet man die Definition von $\mathbb{M}$ und geht zu den charakteristischen Funktionen über, so erkennt man: Eine Menge M ist lokal-meßbar genau dann, wenn alle Produkte von χ_M mit charakteristischen Funktionen von Mengen des Prä-Rings $\mathbb{I}$ integrierbar sind. Damit folgt aufgrund der Definition von $\mathfrak{E}$: M ist lokal-meßbar genau dann, wenn alle Produkte von χ_M mit Funktionen aus $\mathfrak{E}$ integrierbar sind. Schließlich ergibt die Abschätzung

$$\|\chi_M f - \chi_M g\| \le \|f - g\|$$

noch: *Eine Menge M ist genau dann lokal-meßbar, wenn alle Produkte von χ_M mit Funktionen aus $\mathfrak{I}$ wieder zu $\mathfrak{I}$ gehören.* Mit dieser letzten Aussage erkennt man sofort:

$$\mathbb{L} = \{M \subset \mathfrak{R} : \forall B \in \mathbb{M}\ \ B \cap M \in \mathbb{M}\}.$$

Damit nun ist zu erkennen: $\mathbb{L}$ *ist eine „Algebra"*, d. h. ein *Ring, zu dem die Grundmenge* $\mathfrak{R}$ *selbst gehört.*

Für beliebige Mengen $M \in \mathbb{P}(\mathfrak{R})$ (Potenzmenge) kann man definieren:

$$\mu^*(M) := \|\chi_M\| .$$

Die Eigenschaften einer starken Integralnorm ergeben sofort:

μ^* ist ein „äußeres Maß" auf $\mathbb{P}(\mathfrak{R})$, d. h. man hat

$$\mu^* : \mathbb{P}(\mathfrak{R}) \longrightarrow [0, \infty],$$

$$\mu^*(\emptyset) = 0,$$

$$M \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \longrightarrow \mu^*(M) \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^*(M_\nu) \qquad \text{„abzählbar subadditiv".}$$

Beweis: Für die letzte Aussage schreibt man die Voraussetzung um zur Ungleichung

$$\chi_M \le \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{M_n}$$

und wendet die σ-Subadditivität der LEBESGUE-Norm an. $\square$

Jedes solche äußere Maß* erzeugt in kanonischer Weise mit der Definition

$$\delta(M, N) := \mu^*(M \triangle N) = \|\chi_M - \chi_M\|$$

eine *„Pseudometrik"* für die Teilmengen von $\mathfrak{R}$, d. h. δ hat die Eigenschaften einer Metrik mit Ausnahme der Endlichkeit und der Definitheit; δ liefert also Werte in $[0, \infty]$, den Wert 0 zumindest für $M = N$, ist symmetrisch und erfüllt die bekannte Dreiecksungleichung.

Es gilt nun:

$\mathbb{M}$ ist die abgeschlossene Hülle von $R(\mathbb{I})$ in der durch δ gegebenen Topologie für $\mathbb{P}(\mathfrak{R})$.

Zum *Beweis* erkennt man zunächst rasch, daß die gegebene Bedingung hinreichend ist,

* Hier wird nur benötigt, daß μ^* ein äußerer *Inhalt* ist.

weil die charakteristische Funktion jeder Menge aus R($\mathbb{I}$) eine einfache Funktion ist. — Für den Nachweis der Notwendigkeit seien $\varepsilon > 0$ und h eine einfache Funktion mit

$$\|\chi_M - h\| < \varepsilon .$$

Man bildet dann etwa

$$A := \Big\{ x \in \mathfrak{R} : h(x) \geq 1/2 \Big\},$$

erkennt $A \in R(\mathbb{I})$ und bestätigt

$$|\chi_M - \chi_A| \leq 2|\chi_M - h|, \quad \delta(M, A) \leq 2\varepsilon .$$

Weiter erkennt man auch:

$\mathbb{L}$ *ist δ-abgeschlossen.*

Zum *Beweis* kombiniert man die Definition von $\mathbb{L}$ mit der Abschätzung

$$\delta(A \cap M, A \cap N) \leq \delta(M, N) ,$$

hier speziell für $A \in \mathbb{I}$. □

Die Abschätzung der Integrale durch die Integralnorm für alle integrierbaren Funktionen läßt speziell

$$|\mu(M) - \mu(N)| \leq \delta(M, N)$$

erkennen. Damit bestätigt man:

Das Maß μ auf $\mathbb{M}$ ist die eindeutige δ-stetige Fortsetzung des Maßes μ auf $R(\mathbb{I})$.

Der Konvergenzsatz von LEVI II ergibt darüber hinaus noch eine weitere Struktureigenschaft von $\mathbb{M}$:

Hat man eine aufsteigende Folge von Mengen M_n in $\mathbb{M}$ derart, daß die Maße $\mu(M_n)$ beschränkt bleiben, so gehört die Vereinigungsmenge M aller M_n ebenfalls zu $\mathbb{M}$. Dazu gilt dann

$$\delta(M, M_n) \longrightarrow 0 , \qquad \mu(M_n) \uparrow \mu(M) .$$

Zum *Beweis* betrachtet man die charakteristischen Funktionen der M_n, die isoton gegen die charakteristische Funktion von M konvergieren, während ihre Integrale beschränkt bleiben, und wendet den Satz von LEVI II an.

Eine einfache Folgerung ist:

$\mathbb{M}$ *ist ein ‚δ-Ring‘;* d. h. ein gegen die Bildung abzählbarer Durchschnitte abgeschlossener Ring.

Bekannt ist: $\mathbb{M}$ ist ein Ring. Zum *Beweis* der zusätzlichen Eigenschaft betrachtet man für $(A_n) \in \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$

$$\mathbb{M} \ni M_n := \bigcap_{\nu=1}^{n} A_\nu \downarrow M := \bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu .$$

Man hat dann $\mathbb{M} \ni M_1 \setminus M_n \uparrow M_1 \setminus M$, also — unter Beachtung von $\mu(M_1 \setminus M_n) \leq \mu(M_1) < \infty$ — nach der obigen Überlegung $M_1 \setminus M \in \mathbb{M}$ und so $M = M_1 \setminus (M_1 \setminus M) \in \mathbb{M}$. □

Mit der letzten Aussage ergibt die Definition von $\mathbb{L}$ oder auch die notierte zweite Charakterisierung durch die Schnitte mit Mengen aus $\mathbb{M}$ sofort die weitergehende Eigenschaft von $\mathbb{L}$:

$\mathbb{L}$ *ist eine ‚σ-Algebra',*

d. h. eine Algebra und zusätzlich abgeschlossen gegen Bildung von abzählbaren Vereinigungen, damit natürlich auch von abzählbaren Durchschnitten.

Erholsame vorlesungsfreie Zeit
und weiterhin viel Freude und Erfolg bei Ihrem Studium
wünscht Ihnen

dieter hoffmann

TEXTE/AIV/a4_Lebesgue.tex (HP)
TEXTE/VORLuUEB/AIV/a4_Lebesgue.tex (SUN)