Definition

$$\mathbb{F} \text{ „}\textit{Filter (auf } \mathfrak{R})\text{“} :\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbb{F} \in \mathbb{P}'(\mathbb{P}'(\mathfrak{R})) & (\textit{d. h. } \ldots) \\ \mathbb{F} \ni F \subset G \subset \mathfrak{R} \implies G \in \mathbb{F} \\ F, G \in \mathbb{F} \implies F \cap G \in \mathbb{F} \end{cases}$$

$$\mathbb{F}_0 \text{ „}\textit{Filterbasis (auf } \mathfrak{R})\text{“ („}\textit{FB}\text{“)} :\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbb{F}_0 \in \mathbb{P}'(\mathbb{P}'(\mathfrak{R})) \\ F, G \in \mathbb{F}_0 \implies \exists\, H \in \mathbb{F}_0 \quad H \subset F \cap G \end{cases}$$

Für $\mathbb{H} \in \mathbb{P}'(\mathbb{P}'(\mathfrak{R}))$

$$[\mathbb{H}] := \big\{ A \subset \mathfrak{R} \,|\, \exists\, H \in \mathbb{H} \quad H \subset A \big\} \quad (\supset \mathbb{H})$$

3.1 Bemerkung *Für* $\mathbb{H} \in \mathbb{P}'(\mathbb{P}'(\mathfrak{R}))$

$$\mathbb{H} \textit{ Filterbasis} \iff [\mathbb{H}] \textit{ Filter}$$

Beweis: □□□ □

Bezeichnung Falls $\mathbb{F}_0$ Filterbasis und $\mathbb{F} := [\mathbb{F}_0]$ (Filter):
$\mathbb{F}_0$ *„Filterbasis von* $\mathbb{F}$*“*, $\mathbb{F}$ *„von* $\mathbb{F}_0$ *erzeugter Filter“*.

$\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ Filterbasen auf $\mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_1 \le \mathbb{F}_2 :&\iff [\mathbb{F}_1] \subset [\mathbb{F}_2] \\ &\overset{\checkmark}{\iff} \mathbb{F}_1 \subset [\mathbb{F}_2] \\ &\iff \forall\, F_1 \in \mathbb{F}_1 \quad \exists\, F_2 \in \mathbb{F}_2 \quad F_2 \subset F_1 \\ &\iff : \mathbb{F}_1 \text{ „}\textit{gröber}\text{“ als } \mathbb{F}_2 \iff : \mathbb{F}_2 \text{ „}\textit{feiner}\text{“ als } \mathbb{F}_1 \end{aligned}$$

Die Relation $\le$ (zwischen Filterbasen auf $\mathfrak{R}$) ist *reflexiv* und *transitiv.*

3.2 Bemerkung $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ *nicht-leere Mengen;* $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}, \mathbb{F}_0$ *FB auf* $\mathfrak{R}$ *:*

$$f(\mathbb{F}_0) := \big\{ f(F) : F \in \mathbb{F}_0 \big\} \quad \textit{FB auf } \mathfrak{S} \quad (\text{„}\textit{Bild von } \mathbb{F}_0 \textit{ unter } f\text{“}).$$

Beweis: □□□ □

Beispiele

(B1) $\emptyset \neq A \subset \mathfrak{R}$; $\mathbb{F}_0 = \{A\}$ (FB)

(B2) $\mathfrak{R}$ unendlich; $\mathbb{F} := \big\{ A \,|\, A \subset \mathfrak{R} \wedge \widetilde{A} \text{ endlich} \big\}$ (Filter)

(B3) $\mathfrak{R} = \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ dazu gemäß (B2); dann

$$\mathbb{F} = \big\{ A \,|\, A \subset \mathbb{N} \wedge \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \ge n \quad m \in A \big\}$$

(B4) $\mathfrak{S} \neq \emptyset$, $\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{S}$, $\mathbb{F}$ gemäß (B3)

$$\mathbb{F}(\alpha) \ := \ [\alpha(\mathbb{F})] \ = \ \big\{B \,|\, B \subset \mathfrak{S} \ \wedge \ \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \geq n \quad \alpha(m) \in B\big\}$$

(„Fréchet-Filter (der Folge α)")

(B5) $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ TR $\quad (\mathbb{O} \longmapsto \mathbb{U})$; für $x \in \mathfrak{R}$ ist $\mathbb{U}_x$ Filter $\big((U0) – (U3)\big)$ mit *FB*

$$\mathbb{O}_x \ := \ \{O \in \mathbb{O} : x \in O\}.$$

Nur erwähnen wollen wir im Moment schon einmal die

Definition

Ein Filter $\mathbb{F}$ auf $\mathfrak{R}$ heißt „Ultrafilter (auf $\mathfrak{R}$)" genau dann, wenn kein Filter $\mathbb{G}$ auf $\mathfrak{R}$ existiert mit $\mathbb{F} \subsetneq \mathbb{G}$.
Eine Filterbasis $\mathbb{F}_0$ auf $\mathfrak{R}$ heißt „Ultrafilterbasis (auf $\mathfrak{R}$)" genau dann, wenn $[\mathbb{F}_0]$ Ultrafilter ist.

Zu wichtigen Aussagen über Ultrafilter kommen wir erst später.

Ist $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *TR*, dann heißt jede Filterbasis von $\mathbb{U}_x$ eine *„Umgebungsbasis"* $(x \in \mathfrak{R})$.
(auch: *‚lokale Basis'*).
Z. B. bilden in einem SMR $(\mathfrak{R}, \delta)$ für $x \in \mathfrak{R}$

$$\big\{U_x^\varepsilon : \varepsilon > 0\big\}, \quad \big\{K_x^\varepsilon : \varepsilon > 0\big\} \quad \text{und} \quad \Big\{U_x^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\Big\}$$

Umgebungsbasen.

$$\mathbb{B} \subset \mathbb{O} \text{ heißt „}\textit{Basis}\text{ (von } \mathbb{O})\text{"} : \iff \forall\, O \in \mathbb{O} \quad \exists\, \mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B} \quad O \ = \ \bigcup_{\mathbb{B}_1} B$$

$$\overset{\checkmark}{\iff} \forall\, O \in \mathbb{O} \quad \forall\, x \in O \quad \exists\, B \in \mathbb{B} \quad x \in B \subset O$$

$$\mathbb{S} \subset \mathbb{O} \text{ „}\textit{Subbasis}\text{ (von } \mathbb{O})\text{"} : \iff \Big\{\bigcap_{\mathbb{S}_1} S : \mathbb{S} \supset \mathbb{S}_1 \text{ endlich}\Big\} \quad \text{Basis (von } \mathbb{O})$$

$\big\langle \big\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q} \ \wedge \ a \leq b\big\}$ bildet ein (abzählbare!) Basis der (üblichen) Topologie auf $\mathbb{R}$.$\big\rangle$

4 Stetigkeit und Konvergenz

Für $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ TR, $a \in \mathfrak{R}$ und $\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{R}$ definiert man in naturgemäßer Verallgemeinerung der Überlegungen aus AI, AII:

$$\alpha(n) \longrightarrow a \quad \underbrace{(n \longrightarrow \infty)}_{\text{lassen wir meist wieder weg!}} : \iff \forall\, U \in \mathbb{U}_a \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \geq n \quad \alpha(m) \in U$$

Mit dem oben eingeführten FRÉCHET–Filter zu α bedeutet dies gerade:

$$\alpha(n) \longrightarrow a \iff \mathbb{U}_a \subset \mathbb{F}(\alpha)$$

Dies führt zur verallgemeinernden

Definition *Für FB* $\mathbb{F}_0$ *auf* $\mathfrak{R}$

$$\mathbb{F}_0 \longrightarrow a :\iff \mathbb{U}_a \ \leq \ \mathbb{F}_0 \iff \forall\, U \in \mathbb{U}_a \quad \exists\, F \in \mathbb{F}_0 \quad F \subset U$$

($\rightsquigarrow$ übliche Sprechweisen: a *„Grenzwert“*, *„$\mathbb{F}_0$ konvergiert gegen a“* usw.)
Achtung: Ein Grenzwert ist *nicht notwendig* eindeutig.

4.1 Bemerkung *Für* $A \subset \mathfrak{R}$:

$$a \in \overline{A} \iff \exists\, \mathbb{F}_0 \ FB \ \big[\mathbb{F}_0 \longrightarrow a \ \wedge \ \forall\, F \in \mathbb{F}_0 \quad F \subset A\big]$$

Beweis:

$\Longrightarrow$: $\forall\, U \in \mathbb{U}_a \quad U \cap A \neq \emptyset$: $\quad \mathbb{F}_0 := \mathbb{U}_a \underset{e}{\cap} A := \big\{U \cap A : U \in \mathbb{U}_a\big\}$ FB mit $\big[\ \ldots\ \big]$

$\Longleftarrow$: r. S. $\Longrightarrow \forall\, U \in \mathbb{U}_a \quad \exists\, F \in \mathbb{F}_0 \quad F \subset U$, also
r. S. $\Longrightarrow \forall\, U \in \mathbb{U}_a \quad \exists\, F \in \mathbb{F}_0 \quad A \cap U \supset F \cap U = F \neq \emptyset$ $\square$

In AII (Seite 13) haben wir (im wesentlichen) gezeigt:

4.2 Bemerkung *Ist* $(\mathfrak{R}, \delta)$ SMR, *dann:*
$a \in \overline{A} \iff$ *Es existieren* $x_k \in A$ $(k \in \mathbb{N})$ *mit* $x_k \longrightarrow a$

Es seien nun $(\mathfrak{R}_\nu, \mathbb{O}_\nu)$ topologische Räume $\big(\mathbb{O}_\nu \longmapsto \mathbb{U}^\nu, \mathbb{A}_\nu, \ldots\big)$ $(\nu = 1, 2, 3)$,
$f \colon \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_2$, $a \in \mathfrak{R}_1$

Definition f *„in a stetig“* :

$$\iff \forall\, U \in \mathbb{U}^2_{f(a)} \quad \exists\, V \in \mathbb{U}^1_a \quad f(V) \subset U$$
$$\overset{\checkmark}{\iff} \mathbb{U}^2_{f(a)} \ \leq \ f(\mathbb{U}^1_a) \iff \forall\, U \in \mathbb{U}^2_{f(a)} \quad f^{-1}(U) \in \mathbb{U}^1_a$$

4.3 Bemerkung *Sind* $\mathbb{B}^1_a$ *bzw.* $\mathbb{B}^2_{f(a)}$ *Umgebungsbasen von* $\mathbb{U}^1_a$ *bzw.* $\mathbb{U}^2_{f(a)}$, *dann gilt:*
f *in a stetig* $\iff \mathbb{B}^2_{f(a)} \leq f(\mathbb{B}^1_a)$

Beweis: $\square\square\square$ $\square$

4.4 Folgerung *Falls* $(\mathfrak{R}_\nu, \delta_\nu)$ *SMRe* $(\nu = 1, 2)$

f *in a stetig* $\iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathfrak{R}_1 \quad \delta_1(x, a) < \delta \Longrightarrow \delta_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

4.5 Bemerkung *Vor.:* f *in a stetig,* $g \colon \mathfrak{R}_2 \longrightarrow \mathfrak{R}_3$ *in* $f(a)$ *stetig*

Beh.: $g \circ f$ $(\colon \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_3)$ *in a stetig*

4.6 Bemerkung *Vor.:* $A \subset \mathfrak{R}_1$, $p \in \overline{A}$, f *in* p *stetig*

Beh.: $f(p) \in \overline{f(A)}$

Beweis: Zu $U \in \mathbb{U}^2_{f(p)}$ existiert $V \in \mathbb{U}^1_p$ mit $f(V) \subset U$; da $p \in \overline{A}$: $V \cap A \neq \emptyset$, also: $\emptyset \neq f(V \cap A) \subset f(V) \cap f(A) \subset U \cap f(A)$, somit $f(p) \in \overline{f(A)}$ □

4.7 Bemerkung

$$f \text{ in } a \text{ stetig} \iff \big[\mathbb{F}_0 \text{ FB auf } \mathfrak{R}_1 \;\wedge\; \mathbb{F}_0 \longrightarrow a \implies f(\mathbb{F}_0) \longrightarrow f(a)\big]$$

Beweis: $\Longrightarrow$: $\mathbb{F}_0 \longrightarrow a \implies \mathbb{U}^1_a \leq \mathbb{F}_0 \implies \mathbb{U}^2_{f(a)} \leq f(\mathbb{U}^1_a) \leq f(\mathbb{F}_0)$

$\Longleftarrow$: $\mathbb{U}^1_a \longrightarrow a \implies f(\mathbb{U}^1_a) \longrightarrow f(a) \implies \mathbb{U}^2_{f(a)} \leq f(\mathbb{U}^1_a)$ □

4.8 Bemerkung* *Falls* $(\mathfrak{R}_1, \delta_1)$ *SMR:*

$$f \text{ in } a \text{ stetig} \iff \forall\, (x_n) \in \mathfrak{R}_1^{\mathbb{N}} \quad x_n \longrightarrow a \implies f(x_n) \longrightarrow f(a).$$

Beweis: □□□ □

Definition *Für* $A \subset \mathfrak{R}_1$:

$$f \text{ „in } A \text{ stetig“} :\iff \forall\, a \in A \quad f \text{ in } a \text{ stetig}$$
$$f \text{ „stetig“} :\iff f \text{ in } \mathfrak{R}_1 \text{ stetig}$$

4.9 Bemerkung

Mit einer Subbasis $\mathbb{S}_2$ *von* $\mathbb{O}_2$ *sind äquivalent:*
a) f *stetig*
b) $\forall\, O \in \mathbb{O}_2 \quad f^{-1}(O) \in \mathbb{O}_1$
c) $\forall\, O \in \mathbb{S}_2 \quad f^{-1}(O) \in \mathbb{O}_1$
d) $\forall\, A \in \mathbb{A}_2 \quad f^{-1}(A) \in \mathbb{A}_1$
e) $A \subset \mathfrak{R}_1 \implies f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Beweis:

a) $\Longrightarrow$ e): nach (4.6)

e) $\Longrightarrow$ d): Zu $A \in \mathbb{A}_2$ sei $F := f^{-1}(A)$, dann $f(F) \subset A$, nach e): $f(\overline{F}) \subset \overline{f(F)} \subset \overline{A} \subset A$; somit $\overline{F} \subset f^{-1}(A) = F$

d) $\Longrightarrow$ b): ✓

* Für (4.8) genügt eine Eigenschaft (B1), auf die wir erst später eingehen.

b) $\Longrightarrow$ c): trivial

c) $\Longrightarrow$ b): $\square\square\square$

b) $\Longrightarrow$ a): $x \in \mathfrak{R}_1$: Zu $U \in \mathbb{U}^2_{f(x)}$ existiert $O \in \mathbb{O}_2$ mit $f(x) \in O \subset U$, dann $x \in f^{-1}(O) \in \mathbb{O}_1$, also $f^{-1}(O) \in \mathbb{U}^1_x$ $\big(\text{mit } f(f^{-1}(O)) \subset O \subset U\big)$. $\square$

Anmerkung Das *Bild* einer offenen (bzw. abgeschlossenen) Menge unter einer stetigen Abbildung muß *nicht* offen (...) sein:

1) $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R}) : \quad f\big(]-1,1[\big) = [0,1[$

2) $f \colon]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ durch: $f(x) := \frac{1}{x} \quad \big(x \in]0,\infty[\big) : \quad f\big([1,\infty[\big) =]0,1]$

Vergleich von Topologien

Es seien $(\mathfrak{R},\mathbb{O}_1)$ und $(\mathfrak{R},\mathbb{O}_2)$ topologische Räume $\big(\mathbb{O}_\nu \longmapsto \mathbb{U}^\nu\big)$

$$\mathbb{O}_1 \text{ „\textit{feiner}“ als } \mathbb{O}_2 :\Longleftrightarrow \mathbb{O}_2 \text{ „\textit{gröber}“ als } \mathbb{O}_1 :\Longleftrightarrow \mathbb{O}_2 \subset \mathbb{O}_1$$

4.10 Bemerkung *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) $\mathbb{O}_1$ *feiner als* $\mathbb{O}_2$

b) $\forall\, x \in \mathfrak{R} \quad \mathbb{U}^1_x$ *feiner als* $\mathbb{U}^2_x$

c) $\forall\, A \in \mathbb{P}(\mathfrak{R}) \quad \overset{\circ}{A}{}^{(1)} \supset \overset{\circ}{A}{}^{(2)}$

d) $\forall\, A \in \mathbb{P}(\mathfrak{R}) \quad \overline{A}^{(1)} \subset \overline{A}^{(2)}$

e) $\mathrm{id} \colon (\mathfrak{R},\mathbb{O}_1) \longrightarrow (\mathfrak{R},\mathbb{O}_2)$ *stetig*

Beweis: a) $\Longrightarrow$ b): ✓, b) $\Longrightarrow$ c): ✓, c) $\Longrightarrow$ d): nach (2.3),
d) $\Longrightarrow$ e): nach (4.9), e) $\Longrightarrow$ a): ✓ $\square$

5 Initiale Topologien

(Konstruktionsverfahren, um aus gegebenen topologischen Räumen neue zu bilden.)

Es seien E, I nicht-leere Mengen; $(F_i,\mathbb{O}_i)$ topologische Räume,
$f_i \colon E \longrightarrow F_i \ (i \in I) \quad (\mathbb{O}_i \longmapsto \mathbb{U}^i)$

Gesucht ist eine Topologie $\mathbb{O}$ auf dem Ausgangsbereich E, die in dem Sinne zu den gegebenen Abbildungen f_i ‚paßt‘, daß sie alle stetig werden. Verfeinert man eine solche

Topologie, so sind die Abbildungen f_i erst recht stetig. Deshalb wählt man $\mathbb{O}$ minimal, d. h. gerade als *gröbste* Topologie, die dies leistet:

Bezeichnung

$$\begin{aligned}
\mathbb{B} &:= \Big\{\bigcap_J f_i^{-1}(O_i) : O_i \in \mathbb{O}_i \quad (i \in J);\ I \supset J \text{ endlich}\Big\} \\
\mathbb{O} &:= \Big\{\bigcup_{\mathbb{B}_1} B : \mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B}\Big\}
\end{aligned}$$

5.1 Satz

a) $(E, \mathbb{O})$ *ist ein TR.* $\quad$ ($\mathbb{O}$ *„initiale Topologie“ auf* E)

a') $\mathbb{S} := \{f_i^{-1}(O_i) : i \in I, O_i \in \mathbb{O}_i\}$ *ist eine Subbasis von* $\mathbb{O}$.

b) $\mathbb{O}$ *ist die gröbste Topologie auf* E *derart, daß alle* f_i *stetig sind.*

c) Für $p \in E$ *und* $U \subset E$ *gilt:*
U ist eine ($\mathbb{O}$)-Umgebung von p
$\iff$ *Es existieren J endlich $\subset I$, $U_i \in \mathbb{U}^i_{f_i(p)}$ $(i \in J)$ mit* $\bigcap_J f_i^{-1}(U_i) \subset U$

d) $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $f\colon \mathfrak{S} \longrightarrow E$, $s \in \mathfrak{S}$:
f stetig in s $\iff$ $\forall\, i \in I \quad f_i \circ f \colon \mathfrak{S} \longrightarrow F_i$ *stetig in* s

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "f_i"] & & F_i \\
& \mathfrak{S} \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, dashed, "f_i \circ f"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis:

a): $\emptyset, E \in \mathbb{O}$: ✓ $\quad$ (O1): ✓ $\quad$ (O2): $\bigcup_{\mathbb{B}_1} B_1 \cap \bigcup_{\mathbb{B}_2} B_2 = \bigcup_{B_\kappa \in \mathbb{B}_\kappa} B_1 \cap B_2$, also nur zu zeigen:
$B_1, B_2 \in \mathbb{B} \implies B_1 \cap B_2 \in \mathbb{B}$: $\square\square\square$

a'): ✓

b): Es sei $\mathbb{T}$ eine Topologie auf E: $\forall\, i \in I \quad f_i\colon (E, \mathbb{T}) \longrightarrow (F_i, \mathbb{O}_i)$ stetig $\stackrel{(4.9)}{\iff}$
$\forall\, i \in I\ \forall\, O_i \in \mathbb{O}_i \quad f_i^{-1}(O_i) \in \mathbb{T} \stackrel{\text{a')}}{\iff} \mathbb{O} \subset \mathbb{T}$

c): U Umgebung von $p \iff$ Es existiert $O \in \mathbb{O}$ mit $p \in O \subset U \iff$ Es existieren J endlich $\subset I$, $O_i \in \mathbb{O}_i$ $(i \in J)$ mit $p \in \bigcap_J f_i^{-1}(O_i) \subset U \iff$ ‚siehe oben‘

d): $\Longrightarrow$: mit b);
$\Longleftarrow$: Zu $U \in \mathbb{U}_{f(s)}$ existieren nach c) J endlich $\subset I$ und $U_i \in \mathbb{U}^i_{f_i(f(s))}$ $(i \in J)$

mit $\bigcap_J f_i^{-1}(U_i) \subset U$; daher: $\bigcap_J \underbrace{(f_i \circ f)^{-1}(U_i)}_{\in \mathbb{U}_s} = f^{-1}\big(\bigcap_J f_i^{-1}(U_i)\big) \subset f^{-1}(U)$, also $f^{-1}(U) \in \mathbb{U}_s$. □

Spezialfälle

0) Urbild-Topologie *(Reziproke Topologie):*

$I := \{1\}$: (hier:) $\mathbb{O} \stackrel{\checkmark}{=} \mathbb{B} = \big\{f_1^{-1}(O_1) : O_1 \in \mathbb{O}_1\big\}$

1) Spurtopologie $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ TR, $\emptyset \neq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$

$I := \{1\}$, $(F_1, \mathbb{O}_1) := (\mathfrak{R}, \mathbb{O})$, $E := \mathfrak{M}$,

$f_1 := \omega\colon \mathfrak{M} \ni x \longmapsto x \in \mathfrak{R}$ *(,Einbettung')*

Nach 0) ist die zugehörige initiale Topologie $\mathbb{O}_{\mathfrak{M}}$ gleich

$\big\{\omega^{-1}(O) : O \in \mathbb{O}\big\} = \{O \cap \mathfrak{M} : O \in \mathbb{O}\} =: \mathbb{O} \underset{e}{\cap} \mathfrak{M}$.

5.2 Satz

a) $(\mathfrak{M}, \mathbb{O}_{\mathfrak{M}})$ *ist ein TR.* $\quad$ ($\mathbb{O}_{\mathfrak{M}}$: *„Spurtopologie", „induzierte Topologie", „Relativtopologie":* $\longmapsto \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}, \mathbb{U}^{\mathfrak{M}}, \ldots$ *).*

b) $\mathbb{O}_{\mathfrak{M}}$ *ist die gröbste Topologie auf* $\mathfrak{M}$ *derart, daß* ω *stetig ist.*

c) $\forall\, x \in \mathfrak{M} \quad \mathbb{U}_x^{\mathfrak{M}} = \mathbb{U}_x \underset{e}{\cap} \mathfrak{M}$

d) $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $f\colon \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{M}, s \in \mathfrak{S}$:

f *stetig in* $s \iff \omega \circ f\ \big(: (\mathfrak{S}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathfrak{R}, \mathbb{O})\big)$ *stetig in* s

e) $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = \mathbb{A} \underset{e}{\cap} \mathfrak{M}$

Beweis:

a), b), d): nach (5.1)

c): Für $x \in \mathfrak{M}$ und $U \subset \mathfrak{M}$: $U \in \mathbb{U}_x^{\mathfrak{M}} \stackrel{(5.1\text{ c})}{\iff}$ Es existiert $U_1 \in \mathbb{U}_x$ mit $U_1 \cap \mathfrak{M} = \omega^{-1}(U_1) \subset U \iff U \in \mathbb{U}_x \underset{e}{\cap} \mathfrak{M}$

e): Für $A \subset \mathfrak{M}$:

$A \in \mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \iff$ Es existiert $O \in \mathbb{O}$ mit $A = \mathfrak{M} \setminus (O \cap \mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \cap \widetilde{O}$ □

5.3 Trivialität $\quad \emptyset \neq \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$: $\quad \boxed{(\mathbb{O}_{\mathfrak{M}})_{\mathfrak{N}} = \mathbb{O}_{\mathfrak{N}}}$

5.4 Bemerkung $\quad \emptyset \neq \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$: $\quad \boxed{\overline{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{M}}$

Beweis: Für $x \in \mathfrak{M}$: $x \in \overline{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{M}} \stackrel{(5.2\text{ c})}{\iff} \forall\, U \in \mathbb{U}_x \quad \emptyset \neq (U \cap \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{N} = U \cap \mathfrak{N}$ □

5.5 Bemerkung

Vor.: *(zusätzlich)* $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $a \in \mathfrak{M}$*,* $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$

Beh.: α) f *stetig in* $a \Longrightarrow f_{/\mathfrak{M}}$ *stetig in* a

β) f *stetig in* $a \not\Longleftarrow f_{/\mathfrak{M}}$ *stetig in* a

Beweis:

α): $f_{/\mathfrak{M}} = f \circ \omega$

β): $\mathfrak{R} := \mathfrak{S} := \mathbb{R}$ (mit üblicher Topologie) $f := \chi_{\mathbb{Q}}$, $\mathfrak{M} := \mathbb{Q}$:
$f_{/\mathfrak{M}}$ stetig, aber *für kein* $x \in \mathfrak{M}$ ist f stetig in x. □

2) Produkttopologie I nicht-leere Menge, $(\mathfrak{R}_i, \mathbb{O}_i)$ TR $(i \in I)$
‚Kartesisches Produkt der Mengen $\mathfrak{R}_i$*': * ($\rightsquigarrow$ mengentheoretische Schwierigkeiten)

$$\mathfrak{R} := \prod_I \mathfrak{R}_i := \Big\{ x \mid x \colon I \longrightarrow \bigcup_I \mathfrak{R}_i, \ \forall\, j \in I \quad x(j) \in \mathfrak{R}_j \Big\}$$

Bezeichnung Für $x \in \mathfrak{R}$

$$(x_i)_I := \big(x(i)\big)_I := x$$

(Wenn I aus dem Zusammenhang heraus klar ist, notieren wir auch $(x_i) := x, \ldots$);
für $j \in I$:

x_j *„j-te Koordinate (von x)"*

$p_j \colon \mathfrak{R} \ni x \longmapsto x_j \in \mathfrak{R}_j$ *„Projektion von* $\mathfrak{R}$ *auf* $\mathfrak{R}_j$*"*

Für $J \subset I$ und $M_i \subset \mathfrak{R}_i$ $(i \in J)$ ist

$$(*) \qquad \bigcap_J p_i^{-1}(M_i) = \prod_I M_i,$$

wenn $M_i := \mathfrak{R}_i$ für $i \in I \setminus J$.

$$\mathbb{B} := \Big\{ \prod_I O_i : O_i \in \mathbb{O}_i \ (i \in J), \ O_i = \mathfrak{R}_i \ (i \in I \setminus J); \ J \text{ endlich} \subset I \Big\}$$

$$\mathbb{O} := \Big\{ \bigcup_{\mathbb{B}_1} B : \mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B} \Big\}$$

5.6 Satz

a) $(\mathfrak{R},\mathbb{O})$ *ist ein TR.* *(„Produktraum zu …“,* $\mathbb{O}$ *„Produkt-Topologie“)*

b) $\mathbb{O}$ *ist die gröbste Topologie auf* $\mathfrak{R}$ *derart, daß alle Projektionen* p_i *stetig sind.*

c) *Für* $p \in \mathfrak{R}$ *und* $U \subset \mathfrak{R}$ *gilt:*
U ist genau dann eine Umgebung von p, wenn J endlich $\subset I$, $U_i \in \mathbb{U}^i_{p_i}$ $(i \in J)$ *mit* $\prod\limits_I U_i \subset U$, *wobei* $U_i := \mathfrak{R}_i$ $(i \in I \setminus J)$, *existieren.*

d) *Für* $(\mathfrak{S},\mathbb{T})$ *TR,* $f\colon \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{R}$, $s \in \mathfrak{S}$:
f *stetig in* $s \iff \forall\, i \in I \quad p_i \circ f\colon \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{R}_i$ *stetig in* s

e) *Für* $A_i \subset \mathfrak{R}_i$ $(i \in I)$: $\boxed{\prod\limits_I \overline{A_i} = \overline{\prod\limits_I A_i}}$

f) $\forall\, j \in I \quad \forall\, O \in \mathbb{O} \quad p_j(O) \in \mathbb{O}_j$ *(p_j ist eine ‚offene‘ Abbildung.)*

Beweis:

a), b), c), d): nach (5.1) (mit $(*)$)

e): Œ $A_i \neq \emptyset$ $(i \in I)$:
$\supset$: $p_j\Big(\prod\limits_I A_i\Big) \overset{(4.9)}{\subset} \overline{p_j(\prod\limits_I A_i)} = \overline{A_j}$;
$\subset$: $a \in \ell.$S.: Für J endlich $\subset I$ und $U_i \in \mathbb{U}^i_{a_i}$ $(i \in J)$, $U_i := \mathfrak{R}_i$ $(i \in I \setminus J)$ existiert $x_i \in U_i \cap A_i$ $(i \in I)$; damit $x \in \prod\limits_I U_i \cap \prod\limits_I A_i$, also (mit c)) $a \in$ r. S.

f): Ist $B = \prod\limits_I O_i$ mit $O_i \in \mathbb{O}_i$ $(i \in I)$, dann ist für $j \in J$

$$p_j(B) = \begin{cases} O_j, & \text{falls } B \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases},$$

also $p_j(B) \in \mathbb{O}_j$ (und das genügt offenbar). □

Anmerkung zu (5.6 f):

$$A \in \mathbb{A} \not\Longrightarrow p_j(A) \in \mathbb{A}_j \qquad (j \in I)$$

Beispiel: $A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\big\}$, $p_1(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) Supremum von Topologien I nicht-leere Menge, $(\mathfrak{R},\mathbb{O}_i)$ TR $(i \in I)$
Mit $E := F_i := \mathfrak{R}$ und $f_i := \mathrm{id}_{\mathfrak{R}}$ $(i \in I)$ ist die zugehörige initiale Topologie auf $\mathfrak{R}$ gerade die *gröbste Topologie* auf $\mathfrak{R}$, die *feiner als alle* $\mathbb{O}_i$ ist.

4) Erzeugte Topologie $\mathfrak{R}$ nicht-leere Menge und $\mathbb{S} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{R})$

Bezeichnung Die gröbste Topologie $\mathbb{T}$ auf $\mathfrak{R}$ mit $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$ heißt die *„von $\mathbb{S}$ erzeugte Topologie"*.

1. Fall $\mathbb{S} = \emptyset$: Die erzeugte Topologie ist $\{\emptyset, \mathfrak{R}\}$.

2. Fall $\mathbb{S} \neq \emptyset$: Für $S \in \mathbb{S}$ ist $\mathbb{T}_S := \{\emptyset, S, \mathfrak{R}\}$ eine Topologie auf $\mathfrak{R}$. Die gesuchte Topologie ist offenbar gerade das Supremum der Topologien $\mathbb{T}_S$ $(S \in \mathbb{S})$. Nach (5.1 a') ist $\mathbb{S}$ eine *Subbasis* dazu.

6 Finale Topologien

(Weiteres wichtiges Verfahren, um aus gegebenen topologischen Räumen neue zu bilden.)

Es seien F, I nicht-leere Mengen; $(E_i, \mathbb{O}_i)$ TRe, $f_i \colon E_i \longrightarrow F \quad (i \in I) \quad (\mathbb{O}_i \longmapsto \mathbb{U}^i)$

$$\mathbb{O} := \left\{ O \mid O \subset F \ \wedge \ \forall\, i \in I \quad f_i^{-1}(O) \in \mathbb{O}_i \right\}$$

Gesucht ist hier eine Topologie $\mathbb{O}$ im Zielbereich F derart, daß die gegebenen Abbildungen f_i stetig werden. Vergröbert man eine solche Topologie, so sind die Abbildungen f_i erst recht stetig. Deshalb wählt man $\mathbb{O}$ maximal, d. h. gerade als *feinste* Topologie, die dies leistet:

6.1 Satz

a) $(F, \mathbb{O})$ *ist ein TR.* $\quad$ *($\mathbb{O}$ „finale Topologie" auf F)*

b) $\mathbb{O}$ *ist die feinste Topologie auf F derart, daß alle f_i stetig sind.*

c) *Für einen TR $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ und eine Abbildung $f \colon F \longrightarrow \mathfrak{S}$ gilt:*
$f \colon (F, \mathbb{O}) \longrightarrow (\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *stetig* $\iff \forall\, i \in I \ f \circ f_i \colon E_i \longrightarrow \mathfrak{S}$ *stetig*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] & \mathfrak{S} \\ & E_i \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, dashed, "f \circ f_i"'] \end{tikzcd}$$

Beweis: a): $\square\square\square$

b): Es sei $\mathbb{T}$ eine Topologie auf F:
$\forall\, i \in I \ f_i \colon E_i \longrightarrow (F, \mathbb{T})$ stetig $\iff \forall\, i \in I \ \forall\, O \in \mathbb{T} \ f_i^{-1}(O) \in \mathbb{O}_i \iff \mathbb{T} \subset \mathbb{O}$

c): $\Longrightarrow$: nach b);
$\Longleftarrow$: Für $T \in \mathbb{T}$ und $i \in I$ gilt:
$f_i^{-1}(f^{-1}(T)) = (f \circ f_i)^{-1}(T) \in \mathbb{O}_i$, also $f^{-1}(T) \in \mathbb{O}$ $\square$