10 Der Satz von Baire

Es sei $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ ein TR.

Bezeichnung Für $A \subset \mathfrak{R}$: A „*nirgends dicht* (in $\mathfrak{R}$)“: $\Longleftrightarrow \overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$

A heißt genau dann „*mager (in* $\mathfrak{R}$*)*“ oder „*von 1.Kategorie (in* $\mathfrak{R}$*)*“, wenn nirgends dichte Teilmengen B_ν von $\mathfrak{R}$ (für $\nu \in \mathbb{N}$) mit $A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_\nu$ existieren.

A „*von 2.Kategorie (in* $\mathfrak{R}$*)*“ $:\Longleftrightarrow$ A nicht mager (in $\mathfrak{R}$)

10.1 Trivialität *Für* $A, B \subset \mathfrak{R}$

a) *A nirgends dicht (mager)* $\wedge\, B \subset A \Longrightarrow$ *B nirgends dicht (mager)*

b) *A nirgends dicht* $\Longrightarrow \overline{A}$ *nirgends dicht*

c) A_ν *mager* $(\nu \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ *mager*

d) *A nirgends dicht* $\Longleftrightarrow \overline{A}$ *enthält keine nicht-leere offene Menge.*

10.2 Bemerkung

Folgende Bedingungen sind äquivalent:

a) *A mager* $\Longrightarrow \widetilde{A}$ *dicht*

b) $\emptyset \neq O \in \mathbb{O} \Longrightarrow$ *O von 2.Kategorie (in* $\mathfrak{R}$*)*

c) $\mathfrak{R} \supset A_\nu \in \mathbb{A},\ \overset{\circ}{A_\nu} = \emptyset \ \ (\nu \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\right)^{\circ} = \emptyset$

d) $\mathbb{O} \ni O_\nu$ *dicht* $(\nu \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcap_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$ *dicht*

Definition

$(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ „Baire-*Raum*“ *genau dann, wenn d) (also auch a), b), c)) gilt.*

Beweis:

a) $\Longrightarrow$ b): $\mathfrak{R} \neq \widetilde{O}$ ist abgeschlossen, also ist $\widetilde{O} \left(= \overline{\widetilde{O}}\right)$ *nicht* dicht, somit nach a): O *nicht* mager.

b) $\Longrightarrow$ c): $A := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ ist nach Voraussetzung mager, daher ist auch $\overset{\circ}{A}$ mager, also — nach b) — $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

c) $\Longrightarrow$ d): $\mathfrak{R} = \overline{O_\nu} \overset{(2.3)}{=} \overset{\circ}{\widetilde{\widetilde{O}}}_\nu$, also $\overset{\circ}{\widetilde{O_\nu}} = \emptyset$; für $O := \bigcap_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$ hat man nach c)

$\overset{\circ}{\widetilde{O}} = \Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \widetilde{O_\nu}\Big)^\circ = \emptyset$, also $\overline{O} \overset{(2.3)}{=} \overset{\circ}{\widetilde{\widetilde{O}}} = \mathfrak{R}$.

d) $\Longrightarrow$ a): Ist A mager, so existieren $A_\nu \subset \mathfrak{R}$ mit $\overset{\circ}{\overline{A_\nu}} = \emptyset$ und $A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$. Für $O_\nu := \widetilde{\overline{A_\nu}}$ gilt dann $\overline{O_\nu} \overset{(2.3)}{=} \widetilde{\overset{\circ}{\overline{A_\nu}}} = \mathfrak{R}$, also ist nach d) $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$ dicht; wegen $\widetilde{A} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \widetilde{A}_\nu \supset \bigcap_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$ folgt: $\widetilde{A}$ dicht. □

10.3 Satz

$(\mathfrak{R}, \delta)$ *vollständiger semimetrischer Raum* $\Longrightarrow$ $(\mathfrak{R}, \mathbb{O}(\delta))$ Baire-*Raum*

Mit (10.1) (b) für $O := \mathfrak{R}$) hat man dann die

10.4 Folgerung (Kategoriesatz von Baire)

Jeder vollständige semimetrische Raum ist von 2. Kategorie (in sich).

Dieser einfach zu beweisende Satz hat viele weittragende Anwendungen (siehe unten und später)!

Beweis von (10.3): Es seien $\mathbb{O}(\delta) \ni O_\nu$ dicht $(\nu \in \mathbb{N})$: $O := \bigcap_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$ und $\emptyset \neq V \in \mathbb{O}$ beliebig; zu zeigen ist: $O \cap V \neq \emptyset$

O_1 ist dicht: Es existieren $x_1 \in \mathfrak{R}$ und $0 < \varepsilon_1 < 1$ mit $\big(U_{x_1}^{\varepsilon_1} \subset\big) K_{x_1}^{\varepsilon_1} \subset O_1 \cap V$;
O_2 ist dicht: Es existieren $x_2 \in \mathfrak{R}$ und $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ mit $K_{x_2}^{\varepsilon_2} \subset O_2 \cap U_{x_1}^{\varepsilon_1}$
(induktiv): Es existieren $x_n \in \mathfrak{R}$ und $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$ mit $K_{x_n}^{\varepsilon_n} \subset O_n \cap U_{x_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$ für $n \geq 2$.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $i, j > n$: $x_i, x_j \in U_{x_n}^{\varepsilon_n}$, also $\delta(x_i, x_j) < 2\varepsilon_n < \frac{2}{n}$; somit ist (x_ν) eine CF, dazu existiert ein $x \in \mathfrak{R}$ mit $x_\nu \longrightarrow x$; da $x_j \in K_{x_n}^{\varepsilon_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $j \geq n$: $x \in K_{x_n}^{\varepsilon_n}$, also $x \in O \cap V$. □

10.5 Korollar („Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit")

Vor.: $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ Baire-*Raum*, $\mathfrak{F} \subset \big\{f \mid f\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig*$\big\}^*$
$\forall\, x \in \mathfrak{R} \quad \sup_{f \in \mathfrak{F}} f(x) =: M_x < \infty$
($\mathfrak{F}$ „punktweise gleichmäßig nach oben beschränkt")

Beh.: *Es existieren* $\emptyset \neq O \in \mathbb{O}$, $0 \leq M < \infty$ *mit:* $\forall\, f \in \mathfrak{F} \quad \forall\, x \in O \quad f(x) \leq M$

*Es genügt: *‚unterhalb halbstetig‘*

Beweis: Œ $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ Für $m \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathfrak{F}$ ist

$$E(m,f) \;:=\; \big\{x \in \mathfrak{R} : f(x) \leq m\big\}$$

abgeschlossen, da f stetig ist. So ist auch

$$E_m \;:=\; \bigcap_{\mathfrak{F}} E(m,f) \qquad \textit{abgeschlossen.}$$

Zu $x \in \mathfrak{R}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $M_x \leq m$, also $x \in E_m$; das zeigt $\mathfrak{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Nach (10.2) existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathring{E}_m \neq \emptyset$. $O := \mathring{E}_m$ und $M := m$ tun's. $\square$

Als weitere (nicht-triviale) **Anwendung** von (10.4) zeigen wir, daß es $\big($z. B. auf $[0,1]\big)$ *stetige* (reellwertige) *Funktionen* gibt, *die nirgends differenzierbar sind.* Wir werden sogar sehen: Im Baire-Sinne sind *‚fast alle'* — d. h. bis auf eine magere Ausnahmemenge alle — *stetigen Funktionen nirgends differenzierbar.*

10.6 $M_r \;:=\; \big\{f \in C^{\mathbb{R}}[0,1] :$ *Für mindestens ein* $\tau \in [0,1[$ *ist* f *in* τ *rechtsseitig dfb.*$\big\}$

Beh.: M_r *ist mager in* $C^{\mathbb{R}}[0,1]$.

Beweis: $C := C^{\mathbb{R}}[0,1]$ mit δ_∞ ist vollständiger MR (nach (8.5)). Für $\mathbb{N} \ni n \geq 2$ sei

$$A_n \;:=\; \left\{f \in C : \;\exists\, x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \;\; \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} \;\leq\; n \;\text{ für alle } h \in \left]0, \frac{1}{n}\right]\right\}$$

(a) $M_r \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$: ✓

(b) A_n ist *abgeschlossen*: Es seien $f_k \in A_n$ $(k \in \mathbb{N})$ und $f \in C$ mit $\|f_k - f\|_\infty \longrightarrow 0$: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $x_k \in \big[0, 1-\frac{1}{n}\big]$ so, daß $|f_k(x_k+h)-f_k(x_k)| \leq n\,h$ für $h \in \big]0, \frac{1}{n}\big]$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass $\big($kommt noch einmal in 12.$\big)$ existiert ein $x \in \big[0, 1-\frac{1}{n}\big]$ so, daß Œ (zunächst Teilfolge!) $x_k \longrightarrow x$. $h \in \big]0, \frac{1}{n}\big]$ fest und $\varepsilon > 0$: Es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f\|_\infty < \varepsilon$, $|f(x_k) - f(x)| < \varepsilon$ und $|f(x_k+h) - f(x+h)| < \varepsilon$; dann kann abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
&|f(x+h) - f(x)| \\
\leq\;& |f(x+h) - f(x_k+h)| + |f(x_k+h) - f_k(x_k+h)| \\
&+ |f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| + |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\
<\;& \varepsilon + \varepsilon + n\,h + \varepsilon + \varepsilon \;=\; n\,h + 4\varepsilon
\end{aligned}$$

($\varepsilon > 0$ beliebig zeigt:) $f \in A_n$

(c) $\mathring{A}_n = \emptyset$: Sonst existierten $f \in A_n$ und $\varepsilon > 0$ so, daß $U_f^{2\varepsilon} \subset A_n$; nach dem Approximationssatz von WEIERSTRASS $\big($(man vergleiche dazu Übung (5.1)$\big)$ existierte ein Polynom P_1 mit $P := P_1/_{[0,1]} \in U_f^{\varepsilon}$, dann $U_p^{\varepsilon} \subset U_f^{2\varepsilon} \subset A_n$. Wähle $0 \le g \in C$ mit $\|g\|_\infty < \varepsilon$, stückweise linear, Steigung aller linearen Abschnitte betraglich größer als $n + \|P'\|_\infty$ (z. B. „Sägezahn"-Funktion). Dann $g + P \in U_p^{\varepsilon} \setminus A_n$ $\lightning$ $\square$

10.7 *Entsprechend ist*

$$M_\ell := \big\{f \in C:\ \textit{Für mindestens ein } \tau \in]0,1] \textit{ ist } f \textit{ in } \tau \textit{ linksseitig dfb.}\big\}$$

mager in C $\big($ebenso oder mit $[0,1] \ni x \longmapsto 1-x$ aus (10.6)$\big)$; daher ist

$$\{f \in C:\ \textit{Für mindestens ein } \tau \in [0,1] \textit{ ist } f \textit{ in } \tau \textit{ einseitig dfb.}\big\} \textit{ mager in } C.$$

Der Beweis zeigt sogar:

$\big\{f \in C$: Für ein $\tau \in [0,1]$ hat f *in* τ *einen einseitig beschränkten Differenzenquotienten.*$\big\}$

ist mager in C. Nach (10.2) und (10.4) sind die Komplemente all dieser Mengen dicht in C!
⟨Ergänzungen dazu z. B. in OXTOBY⟩

11 Separabilität

Es sei $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ ein TR.

Definition

$$\mathfrak{R} \text{ „}\textit{separabel}\text{"} :\Longleftrightarrow \textit{ Es existiert (höchstens) abzählbare dichte Teilmenge von } \mathfrak{R}.$$

11.0 Trivialität $A, B, C \subset \mathfrak{R}$: *$A$ dicht in B $\wedge$ B dicht in C $\Longrightarrow$ A dicht in C*

11.1 Bemerkung

a) $\mathbb{O}$ *hat abzählbare Basis* $\Longrightarrow$ $\mathfrak{R}$ *separabel*

b) $(\mathfrak{R}, \delta)$ *SMR, separabel* $\Longrightarrow$ $\mathbb{O}(\delta)$ *hat abzählbare Basis*

c) $(\mathfrak{R}, \delta)$ *SMR, separabel,* $\emptyset \ne M \subset \mathfrak{R}$ $\Longrightarrow$ (M, δ) *separabel*

Beweis:

a): Mit einem $I \subset \mathbb{N}$ sei $\{O_n : n \in I \cup \{0\}\}$ eine Basis von $\mathbb{O}$ mit $O_n \neq \emptyset$ für $n \in I$. Für $n \in I$ sei jeweils $a_n \in O_n$ gewählt und damit

$$A := \{a_n : n \in I\}$$

gebildet. Wir zeigen: A ist *dicht:* Zu zeigen: $\emptyset \neq V \in \mathbb{O} \implies V \cap A \neq \emptyset$: Für $p \in V$ existiert $n \in I$ mit $p \in O_n \subset V$: $a_n \in V \cap A$.

b): Es sei A eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathfrak{R}$: $\{U_a^{1/k} : a \in A, k \in \mathbb{N}\}$ ist dann abzählbar; für $x \in O \in \mathbb{O}$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $U_x^{1/k} \subset O$, dazu existiert ein $a \in A$ mit $\delta(a, x) < \frac{1}{2k}$, dann $x \in U_a^{1/2k} \subset O$, also ist $\{U_a^{1/k} : a \in A, k \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathbb{O}(\delta)$.

c): nach a) und b) $\square$

Beispiele

(B1) $\mathbb{R}$ ist separabel. ($\mathbb{Q}$ ist dicht.)

(B2) $(\mathbb{R}^m, \| \ \|_p)$ ist separabel. $(1 \leq p \leq \infty;\ m \in \mathbb{N})$ ($\mathbb{Q}^m$ ist dicht.)

(B3) $(\ell_p, \| \ \|_p)$ ist separabel. $(1 \leq p < \infty)$

(B4) $(\ell_\infty, \| \ \|_\infty)$ ist nicht separabel.

(B5) $(C[a,b], \| \ \|_\infty)$ ist separabel. $(-\infty < a < b < \infty)$

(B6) $\mathfrak{R}$ nicht-leere Menge, δ diskrete Metrik auf $\mathfrak{R}$
$(\mathfrak{R}, \mathbb{O}(\delta))$ separabel $\iff$ $\mathfrak{R}$ abzählbar

Beweise: (B1): aus AI bekannt

(B2): $\| \ \|_p$ erzeugt gerade die Produkt-Topologie auf $\mathbb{R}^m$; daher $\overline{\mathbb{Q}^m} = \overline{\mathbb{Q}}^m = \mathbb{R}^m$ (man vergleiche (5.6 e))

(B3): $e_k(j) := \delta_{kj} \quad (j, k \in \mathbb{N})$

$$A := \left\{ \sum_{\kappa=1}^{k} r_\kappa e_\kappa : r_\kappa \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}; k \in \mathbb{N} \right\}^*$$

* $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} := \begin{cases} \mathbb{Q} & , \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} & , \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$

A ist abzählbar: ✓
A ist dicht: Zu $x \in \ell_p$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{\kappa=k+1}^{\infty} |x_\kappa|^p < \frac{1}{2}\varepsilon^p$; es existieren dann $r_\kappa \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ mit $|r_\kappa - x_\kappa|^p < \frac{1}{2k}\varepsilon^p$ für $\kappa = 1, \dots, k$. $y := \sum\limits_{\kappa=1}^{k} r_\kappa e_\kappa$:

$$\|x-y\|_p \;=\; \left(\sum_{\kappa=1}^{k} |r_\kappa - x_\kappa|^p + \sum_{\kappa=k+1}^{\infty} |x_\kappa|^p \right)^{1/p} \;<\; \varepsilon$$

(B4): $B := \big\{ x \mid x \colon \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\} \big\} \subset \ell_\infty$, B ist überabzählbar: ✓
$x, y \in B$ mit $x \neq y \implies \delta_\infty(x,y) = 1 \overset{(\checkmark)}{\implies}$ Behauptung

(B5): α) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $a_\kappa \in \mathbb{K}\,(\kappa = 1, \dots, k)$ sei $P(x) := \sum\limits_{\kappa=0}^{k} a_\kappa x^\kappa$ $\big(x \in [a,b]\big)$.
$M := \max\left\{ \sum\limits_{\kappa=0}^{k} |x|^\kappa : x \in [a,b] \right\}$ $(< \infty)$; zu $\varepsilon > 0$ existieren $r_k \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ mit $|r_\kappa - a_\kappa| < \frac{\varepsilon}{M}$ $(\kappa = 0, \dots, k)$: damit

$$\left| \sum_{\kappa=0}^{k} a_\kappa x^\kappa \;-\; \sum_{\kappa=0}^{k} r_\kappa x^\kappa \right| < \;\varepsilon$$

β) Mit α), Approximationssatz von WEIERSTRASS (und (11.0)) folgt die Behauptung.

(B6): Nur $\mathfrak{R}$ ist dicht. □□□ □

12 Kompaktheit

Kompaktheit ist uns schon aus den Vorlesungen A I und A II vertraut: Im $\mathbb{R}^n$ bedeutet Kompaktheit einer Menge gerade, daß sie abgeschlossen und beschränkt ist. Reellwertige stetige Funktionen auf einer kompakten Menge nehmen ihr Minimum und Maximum an. Eine auf einer kompakten Menge stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

Es seien $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ TR und $M \subset \mathfrak{R}$.

Definition
M *„kompakt“*: $\iff \forall\, \mathbb{O}_1 \left(\subset \mathbb{O}, M \subset \bigcup\limits_{\mathbb{O}_1} O \right) \quad \exists\, \mathbb{O}_2 \left(\textit{endlich}, \subset \mathbb{O}_1 \right) \quad M \subset \bigcup\limits_{\mathbb{O}_2} O$
In Worten: □□□; manchmal wird diese Eigenschaft auch als *‚quasikompakt‘* bezeichnet.

12.1 Trivialität *Falls* $\emptyset \neq M$*:* M *kompakt* $\iff \big(M, \mathbb{O}_M\big)$ *kompakt*

12.2 Trivialität

a) $\mathbb{O}$ *endlich* $\Longrightarrow$ M *kompakt*

a') *Jeder endliche TR ist kompakt.*

b) $\mathbb{O}$ *diskrete Topologie* $\big($*d. h.* $\mathbb{O} = \mathbb{P}(\mathfrak{R})\big)$:
M *kompakt* $\Longleftrightarrow$ M *endlich*

c) $\mathfrak{R} \supset M_\nu$ *kompakt* $\big(\nu = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}\big) \Longrightarrow \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} M_\nu$ *kompakt*

12.3 Trivialität *Äquivalent sind:*

a) $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *kompakt*

b) $\forall\, \mathbb{A}_1 \big(\subset \mathbb{A}, \bigcap\limits_{\mathbb{A}_1} A = \emptyset\big)$ $\exists\, \mathbb{A}_2$ *(endlich,* $\subset \mathbb{A}_1$*)* $\bigcap\limits_{\mathbb{A}_2} A = \emptyset$

12.4 Bemerkung

Vor.: $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $f\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$ *stetig,* $\mathfrak{R}$ *kompakt*

Beh.: $f(\mathfrak{R})$ *kompakt*

Beweis: □□□ □

12.5 Bemerkung $\mathfrak{R}$ *kompakt* $\wedge$ M *abgeschlossen* $\Longrightarrow$ M *kompakt*

Beweis: □□□ □

12.6 Bemerkung $\mathfrak{R}$ *HdR* $\wedge$ M *kompakt* $\Longrightarrow$ M *abgeschlossen*

Beweis: Œ $M \neq \mathfrak{R}$: Es sei $x \in \widetilde{M}$ fest:
Für $y \in M$ existieren $U^{(y)} \in \mathbb{U}_x \cap \mathbb{O}$ und $U_y \in \mathbb{U}_y \cap \mathbb{O}$ mit $U^{(y)} \cap U_y = \emptyset$: $M \subset \bigcup\limits_{y \in M} U_y$, also existiert $M \supset M_0$ endlich mit $M \subset \bigcup\limits_{y \in M_0} U_y =: V \in \mathbb{O}$. $W := \bigcap\limits_{y \in M_0} U^{(y)} \in \mathbb{U}_x$ und $V \cap W = \emptyset$, somit $W \subset \widetilde{V} \subset \widetilde{M}$ (also $\widetilde{M}$ offen). □

12.7 Folgerung

Vor.:	$(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *kompakt,* $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *HdR,* $f\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$ *bijektiv, stetig*
Beh.:	f *ist topologisch.*

Beweis: Für $O \in \mathbb{O}$ ist nach (12.5) $\widetilde{O}$ kompakt, also nach (12.4) $\widetilde{f(O)} \stackrel{\checkmark}{=} f(\widetilde{O})$ kompakt und somit nach (12.6) *abgeschlossen*; f ist daher auch offen. □

Kompaktheit läßt sich auf verschiedene Weisen mittels Filter(basen) beschreiben. Wir definieren dazu zunächst ‚Berührungspunkte' zu Filterbasen. Zum besseren Verständnis erinnern wir an A I:

Für $a \in \mathbb{R}$ und eine Folge $\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a \text{ „\textit{Häufungswert zu} } \alpha\text{“} :\iff&\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, m \geq n \quad |\alpha(m) - a| < \varepsilon \\ \iff&\ \forall\, U \in \mathbb{U}_a \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \{\alpha(m) : m \geq n\} \cap U \neq \emptyset \\ \iff^{*}&\ \forall\, U \in \mathbb{U}_a \quad \forall\, F \in \mathbb{F}(\alpha) \quad F \cap U \neq \emptyset \\ \iff&\ \forall\, F \in \mathbb{F}(\alpha) \quad a \in \overline{F} \\ \iff&\ a \in \bigcap_{F \in \mathbb{F}(\alpha)} \overline{F} \end{aligned}$$

Für $a \in \mathfrak{R}$ und eine FB $\mathbb{F}$ auf $\mathfrak{R}$:

Definition a *„Berührungspunkt“ („Bp“) zu* $\mathbb{F}$: $\iff a \in \bigcap_{F \in \mathbb{F}} \overline{F}$

Oben gilt also: a Häufungswert zu $\alpha \iff a$ Bp zu $\mathbb{F}(\alpha)$

Zur Einübung des Begriffes zeigen wir:

12.8 Bemerkung

$\alpha)$ $\mathbb{F} \longrightarrow a \implies a$ *Bp zu* $\mathbb{F}$

$\beta)$ a *Bp zu* $\mathbb{F} \iff$ *Es existiert FB* $\mathbb{G} \geq \mathbb{F}$ *mit* $\mathbb{G} \longrightarrow a$.

Beweis:

$\alpha)$ Zu $U \in \mathbb{U}_a$ und $F \in \mathbb{F}$ existiert $F_U \in \mathbb{F}$ mit $F_U \subset U$, damit $\emptyset \neq F \cap F_U \subset F \cap U$; also $a \in \overline{F}$.

$\beta)$ $\implies$: $\mathbb{G} := \mathbb{U}_a \underset{e}{\cap} \mathbb{F}$ $\big(:= \{U \cap F : U \in \mathbb{U}_a, F \in \mathbb{F}\}\big)$ tut's □□□.

$\Longleftarrow$: nach $\alpha)$ (und: a Bp zu $\mathbb{G} \stackrel{\checkmark}{\implies} a$ Bp zu $\mathbb{F}$) □

12.9 Bemerkung

Äquivalent sind:

$\alpha)$ $\mathfrak{R}$ *ist kompakt.*

$\beta)$ *Jede FB auf* $\mathfrak{R}$ *hat einen Bp.*

$\gamma)$ *Zu jeder FB auf* $\mathfrak{R}$ *existiert eine konvergente feinere FB (auf* $\mathfrak{R}$*).*

---

* Dies mit $\mathbb{F}(\alpha)$ (Fréchet-Filter der Folge α) beschrieben

Beweis: $\big((12.3)$ beachten!$\big)$:

$(\beta) \iff (\gamma)$: nach (12.8)

$(\alpha) \implies (\beta)$: Zu einer FB $\mathbb{F}$ auf $\mathfrak{R}$ betrachten wir

$$\mathbb{A}_1 := \left\{ \overline{F} : F \in \mathbb{F} \right\} \qquad (\subset \mathbb{A});$$

für $\mathbb{F} \supset \mathbb{F}_1$ endlich hat man $\bigcap_{\mathbb{F}_1} F \neq \emptyset$, also $\bigcap_{F \in \mathbb{F}_1} \overline{F} \neq \emptyset$; daher $\bigcap_{F \in \mathbb{F}} \overline{F} \neq \emptyset$.

$(\beta) \implies (\alpha)$: Für $\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}$ ist *zu zeigen:*

$$\Big[\forall\, \mathbb{A}_2 \text{ (endlich, } \subset \mathbb{A}_1) \bigcap_{\mathbb{A}_2} A \neq \emptyset\Big] \implies \bigcap_{\mathbb{A}_1} A \neq \emptyset\,.$$

Aus $\big[\ldots\big]$ folgt: $\Big\{\bigcap_{\mathbb{A}_2} A : \mathbb{A}_1 \supset \mathbb{A}_2 \text{ endlich}\Big\}$ ist eine FB auf $\mathfrak{R}$; dazu existiert — nach Voraussetzung — ein Bp $p \in \mathfrak{R}$, somit

$$\forall\, A \in \mathbb{A}_1 \quad p \in \overline{A} = A\,, \text{ also } \bigcap_{\mathbb{A}_1} A \neq \emptyset\,.$$

□

12.10 Folgerung *In einem kompakten TR besitzt jede Folge einen Häufungswert.*

Dabei sei natürlich für eine Folge (α_n) ein Häufungswert a entsprechend verallgemeinert definiert:

$$\forall\, U \in \mathbb{U}_a \;\forall\, n \in \mathbb{N} \;\exists\, m \geq n \;\; \alpha_m \in U$$

In A II hatten wir gesehen, daß es im $\mathbb{R}^k$ verschiedene Möglichkeiten gibt, ‚*Kompaktheit*' zu *beschreiben*. Wir klären im Folgenden (unter anderem) die Beziehungen dieser verschiedenen ‚Kompaktheitsbegriffe' untereinander in beliebigen topologischen Räumen. Dazu betrachten wir:

k $\quad \mathfrak{R}$ *ist kompakt.*

ak $\quad \mathfrak{R}$ „*abzählbar-kompakt*“: $\iff \forall\, \mathbb{O}_1 \; \big(\text{abzählbar}, \subset \mathbb{O},\; \mathfrak{R} = \bigcup_{\mathbb{O}_1} O\big)$
$\exists\, \mathbb{O}_2 \; \big(\text{endlich}, \subset \mathbb{O}_1\big)$ mit $\mathfrak{R} = \bigcup_{\mathbb{O}_2} O$

BW $\quad \mathfrak{R}$ „FRÉCHET-*kompakt*“: $\iff \mathfrak{R}$ hat „BOLZANO-WEIERSTRASS-*Eigenschaft*“
$:\iff \big[\mathfrak{R} \supset M \text{ unendlich} \implies \dot{M} \neq \emptyset\big]$

D $\quad \mathbb{A} \ni A_n \supset A_{n+1} \neq \emptyset \;\; (n \in \mathbb{N}) \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$

fk $\quad \mathfrak{R}$ „*folgenkompakt*“: $\iff \forall\, (x_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}} \quad \exists\, a \in \mathfrak{R} \quad \exists\, \varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ streng isoton mit $x_{\varphi(k)} \longrightarrow a \;\; (k \longrightarrow \infty)$

Daneben betrachten wir noch die beiden Eigenschaften:

$\boxed{\text{B1}}$ Für jedes $x \in \mathfrak{R}$ hat $\mathbb{U}_x$ eine abzählbare (Umgebungs-) Basis.

$\boxed{\text{B2}}$ $\mathbb{O}$ besitzt eine abzählbare Basis.

12.11 Trivialität

a) *Jeder SMR erfüllt* $\boxed{\text{B1}}$. $\left(\rightsquigarrow \left\{U_x^{1/n} : n \in \mathbb{N}\right\}\right)$

b) $\boxed{\text{B2}} \Longrightarrow \boxed{\text{B1}}$

c) (k) $\Longrightarrow$ (ak)

12.12 Satz (von Lindelöf)

Vor.: $\boxed{\text{B2}}$; $\mathbb{O}_1 \subset \mathbb{O}$ *mit* $\mathfrak{R} = \bigcup\limits_{\mathbb{O}_1} O$

Beh.: *Es existiert* $\mathbb{O}_2$ *(abzählbar,* $\subset \mathbb{O}_1$*) mit* $\mathfrak{R} = \bigcup\limits_{\mathbb{O}_2} O$

Beweis: Mit einem geeigneten $I \subset \mathbb{N}$ sei $\{O_n : n \in I\}$ Basis von $\mathbb{O}$. Für jedes $O \in \mathbb{O}_1$ existiert $J(O) \subset I$ so, daß $O = \bigcup\limits_{n \in J(O)} O_n$. $J := \bigcup\limits_{O \in \mathbb{O}_1} J(O)$ $(\subset I)$. Für jedes $n \in J$ sei $O^{(n)} \in \mathbb{O}_1$ mit $n \in J(O^{(n)})$ gewählt, also $O_n \subset O^{(n)}$. Das System $\mathbb{O}_2 := \{O^{(n)} : n \in J\}$ tut's dann. □

12.13 Folgerung $\boxed{\text{B2}} \wedge$ (ak) $\Longrightarrow$ (k)

12.14 Bemerkung

a) (ak) $\Longleftrightarrow$ (D)

b) (fk) $\Longrightarrow$ (D)

c) (D) $\Longrightarrow$ (BW)

Beweis:

(ak) $\Longrightarrow$ (D): Falls $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\widetilde{A_n}}_{\in \mathbb{O}} = \mathfrak{R}$, also existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$\bigcup\limits_{n=1}^{N} \widetilde{A_n} = \mathfrak{R}$, d. h. $A_N = \bigcap\limits_{n=1}^{N} A_n = \emptyset$ ↯