(D) $\Longrightarrow$ (ak): Es seien $O_\nu \in \mathbb{O}$ $(\nu \in \mathbb{N})$ mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n = \mathfrak{R}$; $A_n := \widetilde{\bigcup\limits_{\nu=1}^{n} O_\nu}$, dann $\mathbb{A} \ni A_n \supset A_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, also existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n = \emptyset$, d. h. $\bigcup\limits_{\nu=1}^{n} O_\nu = \mathfrak{R}$.

(fk) $\Longrightarrow$ (D): $\mathbb{A} \ni A_n \supset A_{n+1} \neq \emptyset$ $(n \in \mathbb{N})$: Für $j \in \mathbb{N}$ sei $x_j \in A_j$ gewählt; dann existiert $a \in \mathfrak{R}$ so, daß Œ (□□□) $x_n \longrightarrow a$: Für $n \in \mathbb{N}$ und $\nu \geq n$: $x_\nu \in A_\nu \subset A_n$, also $a \in A_n$, somit $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

(D) $\Longrightarrow$ (BW): Es sei $\mathfrak{R} \supset M$ unendlich. Dann existieren $x_n \in M$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. $A_n := \overline{\{x_k : k \geq n\}}$; nach Voraussetzung existiert $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Für $U \in \mathbb{U}_a$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $U \cap \{x_k : k \geq n\} \neq \emptyset$, also $U \cap M$ unendlich, somit $a \in \overset{\bullet}{M}$. □

Nach (12.11 c) und (12.14 a) gilt: (k) $\Longrightarrow$ (D): **„Durchschnittssatz von Cantor“**

12.15 $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *HdR* $\Longrightarrow \Big[$(k) $\Longrightarrow$ (ak) $\Longleftrightarrow$ (BW) $\Longleftrightarrow$ (D) $\Longleftarrow$ (fk)$\Big]$

$\big\langle$FF (‚für (Topologie-)fans‘): Es genügt ‚*T*1-*Raum*‘ statt ‚HdR‘.$\big\rangle$

Beweis: Nach (12.11 c) und (12.14) ist nur noch *zu zeigen:*
(BW) $\Longrightarrow$ (D): Es sei $(A_n) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ mit $A_n \supset A_{n+1} \neq \emptyset$ für $n \in \mathbb{N}$: Falls für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt $A_n = A_N$ $(n \geq N)$, dann ist nichts zu zeigen. Sonst: Œ $A_n \neq A_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es sei dann jeweils $x_n \in A_n \setminus A_{n+1}$, dann existiert $a \in \{x_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}^\bullet$. Für $U \in \mathbb{U}_a$ — nach Übung (2.4.a) — ist $U \cap \{x_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ unendlich, also auch $U \cap \{x_\nu : \nu \geq n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ unendlich, also $a \in \overline{\{x_\nu : \nu \geq n\}} \subset A_n$, somit $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. □

12.16

Vor.: $\boxed{\text{B1}}$

Beh.: (k) $\Longrightarrow$ (ak) $\Longleftrightarrow$ (D) $\Longleftrightarrow$ (fk) $\Longrightarrow$ (BW)

Beweis: Nach (12.11 c) und (12.14) bleibt nur noch *zu zeigen:*
(D) $\Longrightarrow$ (fk): Es sei $(x_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$: $A_n := \overline{\{x_\nu : \nu \geq n\}}$ $(n \in \mathbb{N})$; nach (D) existiert $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. $\boxed{\text{B1}}$ liefert offenbar die Existenz einer Umgebungsbasis $\{U^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$

von a mit $U^{(n)} \supset U^{(n+1)}$. Für $j, n \in \mathbb{N}$ gilt $U^{(j)} \cap \{x_\nu : \nu \geq n\} \neq \emptyset$: Es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_1} \in U^{(1)}$, es existieren dann $n_\nu > n_{\nu-1}$ mit $x_{n_\nu} \in U^{(\nu)}$ $(\nu \in \mathbb{N}_2)$. Man hat dann $x_{n_\nu} \longrightarrow a$ $(\nu \longrightarrow \infty)$. $\square$

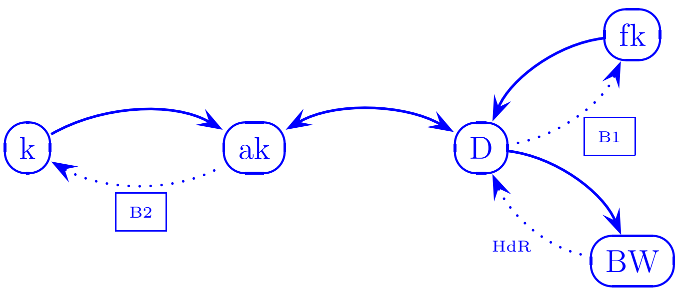
12.17 Folgerung

Vor.: $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *HdR mit* $\boxed{\text{B1}}$ *(also z. B. in metrischen Räumen)*

Beh.: (k) $\Longrightarrow$ (ak) $\Longleftrightarrow$ (BW) $\Longleftrightarrow$ (D) $\Longleftrightarrow$ (fk)

$\langle$FF: Hierzu genügt wieder ‚T_1-*Raum*' statt ‚HdR'.$\rangle$

Insgesamt haben wir gesehen:



Z. B. in Preuss, Seite 229 f, findet man Beispiele für

(B1) HdR mit (k) (also auch (ak), (BW) und (D)), aber *nicht* (fk)

(B2) (BW), *nicht* (ak) (also auch nicht (k), (D) und (fk))

(B3) HdR mit $\boxed{\text{B1}}$ und (fk) (also auch (ak), (BW), (D)), aber *nicht* (k)

Im Folgenden sei $(\mathfrak{R}, \delta)$ ein SMR.

Definition $\mathfrak{R}$ *„totalbeschränkt“*: $\Longleftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M$ *(endlich,* $\subset \mathfrak{R}$*)* $\mathfrak{R} = \bigcup\limits_{a \in M} U_a^\varepsilon$

Für die diskrete Metrik gilt: Jede Teilmenge ist beschränkt; nur endliche Teilmengen sind totalbeschränkt.

12.18 Bemerkung

a)	$\mathfrak{R}$ *folgenkompakt* $\Longrightarrow$ $\mathfrak{R}$ *totalbeschränkt*
b)	$\mathfrak{R}$ *totalbeschränkt* $\Longrightarrow$ $\mathfrak{R}$ *separabel*

Beweis:

a): *Sonst* existierte ein $\varepsilon > 0$ derart, daß: $\forall\, M$ (endlich, $\subset \mathfrak{R}$) $\exists\, x \in \mathfrak{R} \setminus \bigcup_{a \in M} U_a^\varepsilon$.

Wähle $x_1 \in \mathfrak{R}$, $x_n \in \mathfrak{R} \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n-1} U_{x_\nu}^\varepsilon$ $(n \in \mathbb{N}_2)$; das liefert $(x_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\delta(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ für $i \neq j$. Zu (x_n) existierte somit keine konvergente Teilfolge: $\lightning$

b): Für $n \in \mathbb{N}$ existiert $\mathfrak{R} \supset F_n$ endlich mit $\mathfrak{R} = \bigcup_{a \in F_n} U_a^{1/n}$; $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ist abzählbar und dicht. $\square$

12.19

a) $(\mathfrak{R}, \delta)$ *SMR:*	k $\Longleftrightarrow$ ak $\Longleftrightarrow$ D $\Longleftrightarrow$ fk $\Longrightarrow$ BW
b) $(\mathfrak{R}, \delta)$ *MR:*	k $\Longleftrightarrow$ ak $\Longleftrightarrow$ D $\Longleftrightarrow$ fk $\Longleftrightarrow$ BW

Beweis: a): (12.16), (12.18), (12.13) und (11.1.b) b): a) und (12.17) $\square$

12.20 Bemerkung

$\boxed{\mathfrak{R} \textit{ totalbeschränkt} \iff \forall\,(x_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}\ \exists\,\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \textit{ streng isoton so, daß } (x_{\varphi(k)}) \textit{ CF}}$

Beweis: „$\Longleftarrow$": Man vergleiche Beweis zu (12.18.a)

„$\Longrightarrow$": Sei $(x_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$: Es existiert $\mathfrak{R} \supset M_1$ endlich mit $\mathfrak{R} = \bigcup_{a \in M_1} U_a^1$, daher existiert $a_1 \in \mathfrak{R}$ so, daß $x_\kappa \in U_{a_1}^1$ für unendlich viele $\kappa \in \mathbb{N}$. Induktiv: Für $n \in \mathbb{N}$ existieren $a_n \in \mathfrak{R}$ so, daß $x_\kappa \in \bigcap_{\nu=1}^{n} U_{a_\nu}^{1/\nu}$ für unendlich viele $\kappa \in \mathbb{N}$. Wähle $\mathbb{N} \ni n_k =: \varphi(k)$ mit $x_{n_k} \in \bigcap_{\kappa=1}^{k} U_{a_\kappa}^{1/\kappa}$ und $n_{k+1} > n_k$ $(k \in \mathbb{N})$: Dann gilt $\delta(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \leq \frac{2}{N}$ für $k, \ell \geq N$. $\square$

12.21 Bemerkung *

$$\mathfrak{R} \textit{ kompakt} \iff \mathfrak{R} \textit{ totalbeschränkt und vollständig}$$

Beweis:

„$\Longrightarrow$": Für $\varepsilon > 0$ ist $\mathfrak{R} = \bigcup_{a \in \mathfrak{R}} U_a^\varepsilon$, wobei $U_a^\varepsilon \in \mathbb{O}$; also existiert $M (\subset \mathfrak{R}$, endlich) so, daß $\mathfrak{R} = \bigcup_{a \in M} U_a^\varepsilon$. Zu einer CF $(x_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ existiert nach (12.19.a) eine konvergente Teilfolge; offenbar ist dann auch (x_n) konvergent (mit gleichem Grenzwert).

* Ich erinnere an die Voraussetzung: $(\mathfrak{R}, \delta)$ sei SMR.

„$\Longleftarrow$“: Nach (12.19.a) genügt *zu zeigen:* $\mathfrak{R}$ ist folgenkompakt: Zu $(x_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ existiert nach (12.20) $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ streng isoton so, daß $(x_{\varphi(k)})$ CF ist; nach Voraussetzung ist dann $(x_{\varphi(k)})$ konvergent. $\square$

12.22 Folgerung (für $\mathbb{R}^k$) $\big($*z. B. mit* $\| \; \|_2\big)$ $(k \in \mathbb{N})$

Für $M \subset \mathbb{R}^k$: *M kompakt $\iff$ M beschränkt und abgeschlossen*

Beweis: Œ $M \neq \emptyset$

α) M totalbeschränkt $\iff$ M beschränkt: Übung (6.2)

β) M vollständig $\iff$ M abgeschlossen: nach (8.2) und (8.3) $\square$

12.23

Vor.: $(\mathfrak{R}_\nu, \delta_\nu)$ *SMRe* $(\nu = 1, 2)$, $\mathfrak{R}_1$ *kompakt,* $f\colon \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_2$ *stetig*
Beh.: *f ist gleichmäßig stetig.*

Beweis: $\varepsilon > 0$: Zu $x \in \mathfrak{R}_1$ existiert $\delta_x > 0$ so, daß für alle $y \in \mathfrak{R}_1$:

$$\delta_1(x, y) < 2\delta_x \implies \delta_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Es existiert M endlich $\subset \mathfrak{R}_1$ so, daß $\mathfrak{R}_1 = \bigcup\limits_{x \in M} U_x^{\delta_x}$, $\delta := \min\{\delta_x : x \in M\}$ (> 0). Für $y, z \in \mathfrak{R}_1$ mit $\delta_1(y, z) < \delta$ existiert $x \in M$ mit $\delta_1(y, x) < \delta_x$ und so $\delta_1(z, x) \leq \delta_1(z, y) + \delta_1(y, x) < \delta + \delta_x \leq 2\delta_x$; folglich $\delta_2(f(y), f(x))$, $\delta_2(f(z), f(x)) < \varepsilon$, also $\delta_2(f(y), f(z)) < 2\varepsilon$ $\square$

13 Der Satz von Tychonoff

Definition $(P, \leq)$ *„halbgeordnete Menge“* *($\leq$ „Halbordnung“ auf P)* $:\iff$

P Menge und $\leq$ Relation auf P mit* $(\forall\, x, y, z \in P:)$

$x \leq x$ *„reflexiv“*

$x \leq y \,\wedge\, y \leq x \implies x = y$ *„antisymmetrisch“*

$x \leq y \,\wedge\, y \leq z \implies x \leq z$ *„transitiv“*

$(P, \leq)$ *„Kette“* *(„linear geordnete“, „total geordnete“ Menge)* $:\iff$

$(P, \leq)$ *halbgeordnete Menge* $\wedge\; \forall\, x, y \in P \quad x \leq y \,\vee\, y \leq x$

Für eine halbgeordnete Menge $(P, \leq)$, $A \subset P$ und $a \in P$:

A „Kette in $(P, \leq)$“ $:\iff$ $(A, \leq \cap (A \times A))$ *Kette*

a „obere Schranke zu A“ $:\iff$ $\forall\, x \in A \quad x \leq a \iff: A \leq a$

a „maximales Element“ von P $:\iff$ $\forall\, x \in P \quad \big[a \leq x \implies a = x\big]$

Entsprechend sind *„untere Schranke zu A“* und *„minimales Element“* definiert.

* d. h. $\leq\, \subset P \times P$; wir schreiben ‚$x \leq y$‘ statt ‚$(x, y) \in\, \leq$‘

13.1 Lemma von Zorn

Vor.:	$(P, \leq)$ *halbgeordnete Menge mit* $P \neq \emptyset$ *Jede Kette in* $(P, \leq)$ *besitzt eine obere Schranke.*
Beh.:	$(P, \leq)$ *hat ein maximales Element.*

Äquivalent zum Auswahlaxiom (und ..) [harmlos aussehend, doch sehr stark]; siehe z. B. Hewitt/Stromberg.

13.2 Ultrafiltersatz

Zu jedem Filter $\mathbb{F}$ *auf einer nicht-leeren Menge* $\mathfrak{R}$ *existiert ein Ultrafilter* $\mathbb{F}^*$ *mit* $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}^*$.

Beweis: Wir betrachten

$$\mathfrak{F} := \left\{\mathbb{H} \,|\, \mathbb{H} \text{ Filter auf } \mathfrak{R} \,\wedge\, \mathbb{F} \subset \mathbb{H}\right\}.$$

$(\mathfrak{F}, \subset)$ ist offenbar halbgeordnet (und $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, da $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}$). Ist $\mathfrak{K}$ eine (nicht-leere) Kette in $\mathfrak{F}$, dann ist $\bigcup\limits_{\mathbb{H} \in \mathfrak{K}} \mathbb{H}$ aus $\mathfrak{F}$ (□□□) und eine obere Schranke zu $\mathfrak{K}$. Nach dem Lemma von Zorn hat $\mathfrak{F}$ ein maximales Element; dieses ist Ultrafilter. □

13.3 Bemerkung

Ein topologischer Raum $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *ist genau dann kompakt, wenn jede Ultrafilterbasis auf* $\mathfrak{R}$ *konvergiert.*

Beweis: (12.9) und Ultrafiltersatz □

13.4 Satz von Tychonoff (Kompaktheit ist ‚produktiv'!)

Vor.:	I *nicht-leere Menge;* $(\mathfrak{R}_i, \mathbb{O}_i)$ *TR* $(i \in I)$; $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *zugehöriger Produktraum*
Beh.:	$(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *kompakt* $\iff \forall\, i \in I \quad (\mathfrak{R}_i, \mathbb{O}_i)$ *kompakt*

Beweis:

„$\Longrightarrow$": Für $i \in I$ ist die Projektion p_i von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}_i$ stetig, also $\mathfrak{R}_i = p_i(\mathfrak{R})$ kompakt.

„$\Longleftarrow$": Es sei $\mathbb{V}$ eine Ultrafilterbasis auf $\mathfrak{R}$. Für $i \in I$ ist dann $p_i(\mathbb{V})$ Ultrafilterbasis auf $\mathfrak{R}_i$ (Übung (3.3.c)); nach Voraussetzung und (13.3) existiert $x_i \in \mathfrak{R}_i$ mit $p_i(\mathbb{V}) \longrightarrow x_i$. Dann konvergiert $\mathbb{V}$ gegen $(x_i)_I$ (man vergleiche dazu Übung (6.4)). □

Andere Beweismöglichkeit über Subbasis-Satz von Alexander (z. B. in Hewitt/Stromberg)

14 Zusammenhang

Es seien $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ ein TR und $\emptyset \neq M \subset \mathfrak{R}$.

Definition

$\mathfrak{R}$ *„zusammenhängend" („zush.")* $:\Longleftrightarrow$
$\forall\, O_1, O_2 \in \mathbb{O} \quad \big[\mathfrak{R} = O_1 \uplus O_2 \implies O_1 = \emptyset \vee O_2 = \emptyset\big]$

M *„zusammenhängend" („zush.")* $:\Longleftrightarrow$ $(M, \mathbb{O}_M)$ *zusammenhängend*

Bezeichnung $\mathfrak{D}_2 := \big(\{0,1\}, \mathbb{P}(\{0,1\})\big)$: ‚diskreter zweielementiger TR'

14.1 Bemerkung *Äquivalent sind:*

a) *M ist zusammenhängend.*

b) $\forall\, A_1, A_2 \in \mathbb{A}_M \quad \big[M = A_1 \uplus A_2 \implies A_1 = \emptyset \vee A_2 = \emptyset\big]$

c) $\mathbb{O}_M \cap \mathbb{A}_M = \big\{\emptyset, M\big\}$ *(Es gibt keine ‚nicht-trivialen' offen-abgeschlossenen Mengen.)*

d) $\forall\, O_1, O_2 \in \mathbb{O} \quad \big[M \subset O_1 \cup O_2 \wedge M \cap O_1 \neq \emptyset \wedge M \cap O_2 \neq \emptyset\big] \implies M \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$

e) $\forall\, A_1, A_2 \in \mathbb{A} \quad \big[M \subset A_1 \cup A_2 \wedge M \cap A_1 \neq \emptyset \wedge M \cap A_2 \neq \emptyset\big] \implies M \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

f) *Es existiert* keine *stetige und surjektive Abbildung* $f\colon M \longrightarrow \mathfrak{D}_2$.

Beweis: a) $\Longleftrightarrow$ b) $\Longleftrightarrow$ c): ✓ a) $\Longleftrightarrow$ d): ✓ b) $\Longleftrightarrow$ e): ✓

c) $\implies$ f): (Indirekt:) Für eine stetige Abbildung $f\colon M \longrightarrow \mathfrak{D}_2$ ist $f^{-1}(\{0\})$ offen und abgeschlossen. Ist f surjektiv, so gilt: $f^{-1}(\{0\}) \notin \big\{\emptyset, M\big\}$.

f) $\implies$ c): (Indirekt:) Für $A \in \mathbb{O}_M \cap \mathbb{A}_M \setminus \{\emptyset, M\}$ ist $\chi_A\colon M \longrightarrow \mathfrak{D}_2$ stetig und surjektiv. □

14.2 Bemerkung

M zusammenhängend und $M \subset N \subset \overline{M} \implies N$ *zusammenhängend*

Beweis: Sonst existierte eine stetige und surjektive Abbildung $f\colon N \longrightarrow \mathfrak{D}_2$. Da dann auch $f_{/M}\colon M \longrightarrow \mathfrak{D}_2$ stetig wäre, müßte — nach Voraussetzung und (14.1) — $f(M) \subsetneq \{0,1\}$ gelten. Mit $N = \overline{M} \cap N \overset{(5.4)}{=} \overline{M}^N$:

$$f(N) = f\Big(\overline{M}^N\Big) \subset \overline{f(M)} = f(M) \quad ↯$$

□

14.3 Satz

Vor.: $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *zusammenhängend,* $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $f\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$ *stetig*

Beh.: $f(\mathfrak{R})$ *zusammenhängend* ($\rightsquigarrow$ Zwischenwertsatz)

Beweis: Sonst existierte eine stetige und surjektive Abbildung $g\colon f(\mathfrak{R}) \longrightarrow \mathfrak{D}_2$; dann wäre auch $g \circ f\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{D}_2$ stetig und surjektiv. $\lightning$ $\square$

14.4 Bemerkung

Vor.: *I nicht-leere Menge, $\mathfrak{R} \supset M_i$ zusammenhängend* $(i \in I)$
$\forall\, i, j \in I \quad M_i \cap M_j \neq \emptyset$

Beh.: $\bigcup\limits_{i \in I} M_i$ *zusammenhängend*

Beweis: Für eine stetige Abbildung $f\colon \bigcup\limits_{i \in I} M_i \longrightarrow \mathfrak{D}_2$ gilt für jedes $i \in I$: $f_{/M_i}$ ist stetig und daher $f(M_i) = \{0\} \;\vee\; f(M_i) = \{1\}$. Für $i, j \in I$ ergibt $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ dann $f(M_i) = f(M_j)$; daher ist f *nicht* surjektiv. $\square$

Definition Für $x \in \mathfrak{R}$ sei $\mathfrak{Z}(x) := \big\{ Z \subset \mathfrak{R} \,|\, x \in Z \text{ zusammenhängend} \big\}^{*}$ und $C(x) := \bigcup\limits_{Z \in \mathfrak{Z}(x)} Z$ die *„Zusammenhangskomponente (von x)“.*

14.5 Bemerkung

a) *Für jedes $x \in \mathfrak{R}$ ist $C(x)$ zusammenhängend und abgeschlossen.*

b) $\forall\, x, y \in \mathfrak{R} \quad C(x) = C(y) \;\vee\; C(x) \cap C(y) = \emptyset$
In Worten: $\square\square\square$

Beweis:

a) Nach (14.4) ist $C(x)$ zusammenhängend und daher nach (14.2) abgeschlossen.

b) nach (14.4): $\square\square\square$ $\square$

Definition

$\mathfrak{R}$ *„total-unzusammenhängend“* $:\Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathfrak{R} \quad C(x) = \{x\}$

$\mathfrak{R}$ *„lokal-zusammenhängend“* $:\Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathfrak{R}\ \forall\, U \in \mathbb{U}_x\ \exists\, U_0\ \big(\in \mathbb{U}_x, \text{zush.}, \subset U\big)^{**}$

14.6 Bemerkung

a) *$\mathfrak{R}$ zusammenhängend $\not\Longrightarrow$ $\mathfrak{R}$ lokal-zusammenhängend* (Übung (7.1.a)) *Ü stellen!*

b) *$\mathfrak{R}$ lokal-zusammenhängend $\not\Longrightarrow$ $\mathfrak{R}$ zusammenhängend* (Übung (7.1.b)) *Ü stellen!*

---

* Zu beachten: $\{x\}$ ist zusammenhängend.
** d. h.: Jeder Punkt aus $\mathfrak{R}$ hat eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Mengen.

14.7 Bemerkung *In einem lokal-zusammenhängenden Raum** $\mathfrak{R}$ *ist jede Zusammenhangskomponente offen.*

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nach (14.6 a) nicht.

Beweis: Für $x \in \mathfrak{R}$ und ein $y \in C(x)$ existiert eine zusammenhängende Umgebung U von y. Damit: $U \subset C(y) \overset{(14.5\text{ b})}{=} C(x)$, also $C(x) \in \mathbb{U}_y$. □

Nicht behandelte Themen (u. a.):

- *Trennungsaxiome* (Tietze/Urysohn, ...)
- *lokalkompakte, parakompakte* TRe, ... (Kompaktifizierung)
- *Uniforme Räume* ($\rightsquigarrow$ Funktionenräume)
- *Metrisationssätze*
- *Homotopie*

* Hier wird weniger als ‚lokal-zusammenhängend' benutzt!