Teil II

Normierte Vektorräume und lineare Abbildungen

15 Definition und Grundeigenschaften

Zur Erinnerung: (man vergleiche Seite 1) Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:

Definition

$X := \big(X, \| \ \|\big) := \big(X, a, s, \| \ \|\big)$ *„Normierter Vektorraum" („NVR") über* $\mathbb{K} :\Longleftrightarrow$ (X, a, s) *Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *und* $\| \ \|$ *„Norm" auf* X, *d. h.:*

(N0) $\| \ \| \colon X \ni x \longmapsto \|x\| \in [0, \infty[$ *mit*

(N1) $\|x\| = 0 \implies x = 0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (für $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$)

Ohne Forderung (N1)*: „Halbnorm", „Halbnormierter Vektorraum" („HNVR")*

15.1 Bemerkung

Vor.: $\big(X, \| \ \|\big)$ *HNVR über* $\mathbb{K}$

Beh.: *a)* $\big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x \pm y\| \le \|x\| + \|y\|$

b) $\delta(x, y) := \|x - y\| \quad (\ldots) \implies (X, \delta)$ *SMR*

c) $\big(X, \mathbb{O}(\delta)\big)$ *HdR* $\Longleftrightarrow \delta$ *Metrik* $\Longleftrightarrow \| \ \|$ *Norm*

d) *Die Abbildungen* $a \colon X \times X \ni (x, y) \longmapsto x + y \in X$ *und* $s \colon \mathbb{K} \times X \ni (\alpha, x) \longmapsto \alpha x \in X$ *sind stetig.*

e) $\| \ \| \colon X \longrightarrow [0, \infty[$ *ist gleichmäßig stetig.*

‚Immer' $\| \ \| \longmapsto \delta \longmapsto \mathbb{O}(\delta) =: \mathbb{O}(\| \ \|)$
$X \times X$, $\mathbb{K} \times X$ mit Produkttopologie

Beweis: a), b): (0.0) und (0.1)

c): $(X, \mathbb{O}(\delta))$ HdR $\Longleftrightarrow \delta$ Metrik: nach (1.8). δ Metrik $\Longleftrightarrow \| \ \|$ Norm: ✓

d): $\|(x + y) - (a + b)\| = \|(x - a) + (y - b)\| \le \|x - a\| + \|y - b\|$

$$\|\lambda x - \alpha a\| = \|(\lambda - \alpha)x + \alpha(x - a)\| \le |\lambda - \alpha| \, \|x\| + |\alpha| \, \|x - a\|$$
$$\le |\lambda - \alpha|\big(\|a\| + \|x - a\|\big) + |\alpha| \, \|x - a\|$$

e): nach a) □

Für einen $\mathbb{K}$-VR $X = (X, a, s)$ und $A, B \subset X$, $\Lambda \subset \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$:

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b : a \in A, b \in B\} \\ A + x &:= A + \{x\} \\ x + A &:= \{x\} + A \\ \Lambda B &:= \{\lambda b : \lambda \in \Lambda, b \in B\} \\ \alpha B &:= \{\alpha\} B \end{aligned}$$

$$A \text{ „Teilraum“ („Unterraum“)} :\Longleftrightarrow A \neq \emptyset,\ A + A \subset A,\ \mathbb{K}A \subset A$$

(A ist dann mit den ‚induzierten‘ Abbildungen a und s wieder $\mathbb{K}$-VR.)

15.2 Bemerkung

Vor.: $\big(X, a, s, \| \ \|\big)$ *HNVR, M Teilraum von X*

Beh.: *a)* $\big(M, a_{/}, s_{/}, \| \ \|_{/}\big)$ *ist HNVR.*

b) $\mathbb{O}(\| \ \|_{/}) = \mathbb{O}(\| \ \|)_M$
(Die induzierte Halbnorm liefert gerade die Spurtopologie.)

c) $\overline{M}$ *ist ein Teilraum von X.*

‚Immer‘ M mit $a_{/}$, $s_{/}$ und $\| \ \|_{/}$.

Beweis: a): ✓ b): ✓

c): $\overline{M} + \overline{M} = a\big(\overline{M} \times \overline{M}\big) = a\big(\overline{M \times M}\big) \overset{a \text{ stetig}}{\subset} \overline{a(M \times M)} \subset \overline{M}$;

$\mathbb{K}\,\overline{M} = s\big(\mathbb{K} \times \overline{M}\big) = s\big(\overline{\mathbb{K}} \times \overline{M}\big) = s\big(\overline{\mathbb{K} \times M}\big) \overset{s \text{ stetig}}{\subset} \overline{s(\mathbb{K} \times M)} \subset \overline{M}$ □

15.3 Bemerkung

Vor.: $X = (\dots)$ *HNVR über* $\mathbb{K}$

Beh.: *α) Für $a \in X$ ist $T_a \colon X \ni x \longmapsto x + a \in X$ topologisch.*

β) Für $\mathbb{K} \ni \lambda \neq 0$ ist $M_\lambda \colon X \ni x \longmapsto \lambda x \in X$ topologisch.

Beweis: α): T_a bijektiv mit $(T_a)^{-1} = T_{-a}$; T_b stetig für $b \in X$: ✓

β): M_λ bijektiv mit $(M_\lambda)^{-1} = M_{\lambda^{-1}}$; M_μ stetig für $\mu \in \mathbb{K}$: ✓ □

Definition

$X := \big(X, \|\ \|\big) := \big(X, a, s, \|\ \|\big)$ *„($\mathbb{K}$)-*Banach*-Raum“ („BR“ oder „(B)-Raum“)*

$:\Longleftrightarrow$ $(X, a, s, \|\ \|)$ *NVR über* $\mathbb{K}$ *und* $\big(X, \|\ \|\big)$ *vollständig*

15.4 Bemerkung *Auf jedem $\mathbb{K}$-VR läßt sich eine Norm definieren.*

(siehe Übung (7.2))

16 Lineare Abbildungen (‚Operatoren‘)

Es seien $\big(E_j, \|\ \|_j\big)$ NVRe über $\mathbb{K}$ $(j = 1, 2, 3)$.

16.1 Bemerkung

Für eine lineare Abbildung $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ sind äquivalent:

a) *T ist „beschränkt“* $\big($*d. h.:* $\exists\, \alpha \in [0, \infty[\ \forall\, x \in E_1\ \|Tx\|_2 \le \alpha \|x\|_1\big)$.

b) *T ist gleichmäßig stetig.*

c) *Es existiert ein $a \in E_1$, in dem T stetig ist.*

d) *T ist stetig in* 0.

Beweis: b) $\Longrightarrow$ c): trivial

a) $\Longrightarrow$ b): $\|Tx - Ty\|_2 = \|T(x-y)\|_2 \le \alpha \|x - y\|_1$ $(\square\square\square)$

c) $\Longrightarrow$ d): Mit (15.3 a) aus $\|Tx - T0\|_2 = \|T(x+a) - Ta\|_2$

d) $\Longrightarrow$ a): $\big($Zu $\varepsilon = 1\big)$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\|Tx\|_2 \le 1$, falls $\|x\|_1 \le \delta$. Für $E_1 \ni y \ne 0$ und $x := \frac{\delta}{\|y\|_1} y$ ist $\|x\|_1 = \delta$, also $\frac{\delta}{\|y\|_1}\|Ty\|_2 = \|Tx\|_1 \le 1$, folglich $\|Ty\|_2 \le \frac{1}{\delta}\|y\|_1$ für $y \in E_1$. $\square$

Definition

$T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ (NVR-) „Isomorphismus“ $:\Longleftrightarrow$

T algebraischer Isomorphismus (T bijektiv, linear) und T, T^{-1} stetig

$T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ „Norm-Isomorphismus“ $:\Longleftrightarrow$

T algebraischer Isomorphismus und $\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ für alle $x \in E_1$

E_1 und E_2 heißen genau dann „isomorph“ bzw. „norm-isomorph“, wenn ein Isomorphismus bzw. Norm-Isomorphismus $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ existiert.

16.2 Bemerkung

a) *Für* $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ *linear:* T *Isometrie* $\iff \forall\, x \in E_1\ \|Tx\|_2 = \|x\|_1$

b) *Für* $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$*:* T *Norm-Isomorphismus* $\implies T$ *(NVR-) Isomorphismus*

Beweis: b): trivial

a): T Isometrie $\iff \forall\, u,v \in E_1\ \delta_2(Tu,Tv) = \delta_1(u,v)$
$\iff \forall\, u,v \in E_1\ \|T(u-v)\|_2 = \|u-v\|_1 \iff$ r. S. □

16.3 Folgerung (zur Bemerkung (16.1))

Vor.: $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ *linear*

Beh.: T *ist genau dann (NVR-) Isomorphismus, wenn* T *surjektiv ist und* $0 < m \leq M < \infty$ *so existieren, daß*

$$m\|x\|_1 \leq \|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1$$

für alle $x \in E_1$ *gilt.*

Beweis:

(α) Die Abschätzung impliziert, daß T injektiv ist:
T linear und: $Tx = 0 \implies \|Tx\|_2 = 0 \implies \|x\|_1 = 0 \implies x = 0$

(β) (nach (16.1):) T stetig $\iff \exists\, 0 < M < \infty\ \forall\, x \in E_1\ \|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1$

(γ) Für T bijektiv (nach (16.1)):
T^{-1} stetig $\iff \exists\, 0 < m < \infty\ \forall\, y \in E_2\ \|T^{-1}y\|_1 \leq \frac{1}{m}\|y\|_2$
$\iff \exists\, 0 < m < \infty\ \forall\, x \in E_1\ m\|x\|_1 \leq \|Tx\|_2$ □

16.4 Folgerung *Für* $E := E_1 = E_2$ *hat man*

a) $\mathbb{O}(\|\ \|_1) \supset \mathbb{O}(\|\ \|_2) \iff \exists\, \alpha \in]0,\infty[\ \forall\, x \in E\ \|x\|_2 \leq \alpha\|x\|_1$

b) $\mathbb{O}(\|\ \|_1) = \mathbb{O}(\|\ \|_2)$
$\iff \exists\, 0 < m \leq M < \infty\ \forall\, x \in E\ m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$
$:\iff \|\ \|_1$ *und* $\|\ \|_2$ *sind „äquivalent".*

Beweis: b): nach a)

a): ℓ. S. $\overset{(4.10)}{\iff}$ id: $(E, \|\ \|_1) \longrightarrow (E, \|\ \|_2)$ stetig $\overset{(16.1)}{\iff}$ r. S. □

Für eine lineare Abbildung $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ betrachten wir — mit $\infty \cdot 0 := 0$ — die „*Abbildungsnorm*" oder „*Operatornorm*" von T:

Definition

$$\|T\| := \inf\left\{\alpha \in [0,\infty] : \forall\, x \in E_1 \ \ \|Tx\|_2 \le \alpha\|x\|_1\right\}$$

Mit $\sup \emptyset := 0$ gilt:

16.5 Bemerkung

$$\boxed{\begin{aligned} \|T\| &= \min\left\{\alpha \in [0,\infty] : \forall\, x \in E_1 \ \ \|Tx\|_2 \le \alpha\|x\|_1\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} : x \in E_1 \setminus \{0\}\right\} \\ &= \sup\left\{\|Tx\|_2 : x \in E_1 \ \wedge \ \|x\|_1 \le 1\right\} \\ &= \sup\left\{\|Tx\|_2 : x \in E_1 \ \wedge \ \|x\|_1 = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\|Tx\|_2 : x \in E_1 \ \wedge \ \|x\|_1 < 1\right\} \end{aligned}}$$

Beweis: 1. Gleichung: Œ $\|T\| < \infty$: Für $x \in E_1$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\|Tx\|_2 \le \left(\|T\| + \frac{1}{n}\right)\|x\|_1\,;$$

daraus (x fest):

$$\|Tx\|_2 \le \|T\|\ \|x\|_1$$

Für $\alpha \in [0,\infty]$:

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in E_1 \qquad \|Tx\|_2 \le \alpha\|x\|_1 \\ \Longleftrightarrow\ &\forall\, x \in E_1 \setminus \{0\} \quad \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} \le \alpha \\ \Longleftrightarrow\ &S_1 := \sup\left\{\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} : E_1 \ni x \ne 0\right\} \le \alpha\,; \end{aligned}$$

somit $S_1 = \|T\|$.

Die anderen Suprema seien (von oben nach unten) mit S_2, S_3, S_4 bezeichnet.

$S_3 \overset{\checkmark}{\le} S_2 \overset{\alpha)}{\le} S_1 \overset{\beta)}{\le} S_3$, also: $S_1 = S_2 = S_3$; $S_4 \le S_2$: ✓

$\alpha)$: Für $0 < \|x\|_1 \le 1$: $\|Tx\|_2 \le \dfrac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}$

$\beta)$: Für $E_1 \ni x \ne 0$: $\dfrac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} = \left\|T\left(\frac{1}{\|x\|_1}x\right)\right\|_2$

$S_3 \le S_4$: Ist $x \in E_1$ mit $\|x\|_1 = 1$, dann ist für $0 \le \alpha < 1$ $\|\alpha x\|_1 = \alpha < 1$, also $\alpha \|Tx\|_2 = \|T(\alpha x)\|_2 \le S_4$, daher $\alpha S_3 \le S_4$ ($\Longrightarrow$ Behauptung) □

Bezeichnung

$$\mathcal{L}(E_1, E_2) := \big\{ A \mid A\colon E_1 \longrightarrow E_2 \quad (\mathbb{K}-)\,\mathit{linear} \big\}$$

Mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ist $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ein $\mathbb{K}$-*VR*.

$$L(E_1, E_2) := \big\{ A \in \mathcal{L}(E_1, E_2) : A \text{ stetig} \big\} \overset{(16.1)}{=} \big\{ A \in \mathcal{L}(E_1, E_2) : \|A\| < \infty \big\}$$

Beispiel

$$E_1 := C_1^{\mathbb{R}}[0,1] \quad \big(:= \big\{ f \mid f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig dfb} \big\} \big)$$
$$E_2 := C^{\mathbb{R}}[0,1] \quad \big(:= \big\{ f \mid f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \big\} \big)\,;$$

beide versehen mit $\| \ \|_\infty$.

Für $f \in E_1$ sei $Df := f'$, dann ist $D\colon E_1 \longrightarrow E_2$ *linear* (✓) mit $\|D\| = \infty$: □□□

16.6 Satz

a) $\big(L(E_1, E_2), \| \ \| \big)$ *ist ein NVR.*

b) *Ist* $\big(E_2, \| \ \|_2 \big)$ *ein BR, so ist auch* $\big(L(E_1, E_2), \| \ \| \big)$ *ein BR.*

Wir betrachten ‚stets' $L(E_1, E_1)$ mit der Operatornorm.

Beweis:

a): Es seien $S, T \in L(E_1, E_2)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$: Für $x \in E_1$ gilt dann:

$$\|(\alpha S + T)x\|_2 = \|\alpha Sx + Tx\|_2 \le |\alpha|\, \|Sx\|_2 + \|Tx\|_2 \overset{(16.5)}{\le} \big(|\alpha|\, \|S\| + \|T\| \big) \|x\|_1,$$

$$\begin{aligned} &\text{also} && \|\alpha S + T\| \le |\alpha|\, \|S\| + \|T\|\,; \\ &\text{speziell} && \|S + T\| \le \|S\| + \|T\| \\ &\text{und} && \|\alpha S\| \le |\alpha|\, \|S\| \qquad (*) \end{aligned}$$

Für $\alpha \neq 0$:

$$\|S\| = \big\| \alpha^{-1}(\alpha S) \big\| \overset{(*)}{\le} \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha S\|\,;$$

$$\text{daher} \quad \|\alpha S\| = |\alpha|\, \|S\|\,.$$

$$\|T\| = 0 \Longrightarrow \forall\, x \in E_1 \quad \|Tx\|_2 = 0 \Longrightarrow \forall\, x \in E_1 \quad Tx = 0\,, \text{d.h. } T = 0$$

b): Statt einer (teilweisen) — und vielleicht doch etwas künstlichen — Zurückführung auf (8.4 b) geben wir (noch einmal) einen ausführlichen Beweis:

Ist (A_n) eine CF in $L(E_1, E_2)$, dann ist für jedes $x \in E_1$ die Folge $(A_n x)$ eine CF in E_2 $\big($da $\|A_n x - A_m x\|_2 \le \|A_n - A_m\| \, \|x\|_1\big)$ mit eindeutigem Grenzwert $y_x \in E_2$. Wir setzen $Ax := y_x$. Für $x, y \in E_1$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ hat man

$$A(\alpha x + y) \longleftarrow A_n(\alpha x + y) \;=\; \alpha A_n x + A_n y \longrightarrow \alpha Ax + Ay,$$

also $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|A_n - A_m\| \le \varepsilon$ für $n, m \ge N$; es seien $n \ge N$ fest und $m \ge n$ beliebig; für $x \in E_1$ mit $\|x\|_1 \le 1$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|A_n x - Ax\|_2 &\le \|A_n x - A_m x\|_2 + \|A_m x - Ax\|_2 \\ &\le \|A_n - A_m\| + \|A_m x - Ax\|_2 \\ &\le \varepsilon + \|A_m x - Ax\|_2 \end{aligned}$$

$m \longrightarrow \infty$ zeigt: $\|A_n x - Ax\|_2 \le \varepsilon$, also $\|A_n - A\| \le \varepsilon$; aus $A_n - A \in L(E_1, E_2)$ folgt aber insbesondere $A \in L(E_1, E_2)$. □

Bezeichnung Ist $\big(E, \|\ \|\big)$ ein NVR über $\mathbb{K}$, dann sei:

$E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ der *„algebraische Dualraum"* zu E

$E' := L(E, \mathbb{K})$ der (‚topologische' oder ‚stetige') *„Dualraum"* zu E

Elemente aus E^* heißen *„lineare Funktionale"* oder *„Linearformen"* (auf E).

Elemente aus E': *„stetige lineare Funktionale"* oder *„stetige Linearformen"* (auf E)

16.7 Folgerung $\big(E, \|\ \|\big)$ *NVR* $\implies$ E' *BR*

16.8 Bemerkung

Vor.: $T \in L(E_1, E_2) \;\wedge\; S \in L(E_2, E_3)$

Beh.: $S \circ T =: ST \in L(E_1, E_3)$ *und* $\|ST\| \le \|S\| \, \|T\|$

Beweis: Für $x \in E_1$: $\|STx\|_3 \le \|S\| \, \|Tx\|_2 \le \|S\| \, \|T\| \, \|x\|_1$, also $\|ST\| \le \|S\| \, \|T\|$ $\big($und somit $ST \in L(E_1, E_3)\big)$ □

Beispiel

$E_j := \mathbb{R}^2$ $\big($mit (z.B.) $\|\ \|_\infty\big)$ $(j = 1, 2, 3)$

$S \longleftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $T \longleftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; dann $ST = 0$ und (man vergleiche Seite 29)

$\|S\| = 1 = \|T\|$, also $\|ST\| = 0 < 1 = \|S\| \, \|T\|$

Definition

$A := \big(A, \|\ \|\big) := \big(A, a, s, m, e, \|\ \|\big)$ *„normierte $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins"* $:\Longleftrightarrow$
$(A, a, s, \|\ \|)$ *NVR über* $\mathbb{K}$ *und* $m\colon A \times A \ni (a,b) \longmapsto ab \in A$ *assoziativ,*
$e \in A$ *mit* $ex = xe = x$, $(x+y)z = xz + yz$, $z(x+y) = zx + zy$,
$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, $\|xy\| \le \|x\|\,\|y\|$ $(\dots)$ *

Definition

$A := \big(A, a, s, m, e, \|\ \|\big)$ „BANACH-*Algebra" (über* $\mathbb{K}$, *mit Eins* e) („(B)-*Algebra"*)
$:\Longleftrightarrow$ A *normierte* $\mathbb{K}$-*Algebra mit Eins* e *und* $\big(A, \|\ \|\big)$ *vollständig*

16.9 Satz

Vor.:	$\big(E, a, s, \|\ \|\big)$ *NVR über* $\mathbb{K}$
Beh.:	a) $\big(L(E,E), a, s, \circ, \mathrm{id}_E, \|\ \|\big)$ *ist eine normierte* $\mathbb{K}$-*Algebra mit Eins* id_E (*und* $\|\,\mathrm{id}_E\,\| = 1$).
	b) E *BR* $\Longrightarrow$ $\big(L(E,E), a, s, \circ, \mathrm{id}_E, \|\ \|\big)$ *ist eine (B)-Algebra.*

Beweis: a): mit (16.6.a) und (16.8) b): mit a) und (16.6.b) □

16.10 Bemerkung

Ist $A = (A, a, s, m, e, \|\ \|)$ *eine normierte* $\mathbb{K}$-*Algebra (mit Eins), dann ist*
$m\colon A \times A \longrightarrow A$ *stetig.*

Beweis:
$\|xy - cd\| = \big\|x(y-d) + (x-c)d\big\| \le \|x\|\,\|y-d\| + \|x-c\|\,\|d\| \longrightarrow 0$
für $x \longrightarrow c$ und $y \longrightarrow d$ □

17 Reihen in normierten Vektorräumen

Es sei $E := \big(E, \|\ \|\big) := \big(E, a, s, \|\ \|\big)$ ein NVR über $\mathbb{K}$.

FF: Für die folgenden Überlegungen genügt eine abelsche topologische Gruppe $(E, a, \mathbb{O})$.

Definition**

Zu $k \in \mathbb{Z}$ *und* $\alpha\colon \mathbb{N}_k \longrightarrow E$ *betrachten wir die ‚Folge der Partialsummen'*

* Wir fordern *nicht* $\|e\| = 1$!

$\sum\alpha\colon \mathbb{N}_k \longrightarrow E$, *definiert durch*

$$\Big(\sum\alpha\Big)(k) \;:=\; \sum_{\kappa=k}^{k}\alpha(\kappa) \;:=\; \alpha(k)$$

$$\text{und für } \mathbb{N}_k \ni n \quad \Big(\sum\alpha\Big)(n+1) \;:=\; \sum_{\nu=k}^{n+1}\alpha(\nu) \;:=\; \Big(\sum_{\nu=k}^{n}\alpha(\nu)\Big) + \alpha(n+1)\,.$$

Meist benutzte *Sprech- und Schreibweisen:*

Für $a \in E$: $\quad \displaystyle\sum_{\nu=k}^{\infty}\alpha(\nu) = a :\Longleftrightarrow \sum_{\nu=k}^{n}\alpha(\nu) \longrightarrow a \quad \big(\mathbb{N}_k \ni n \longrightarrow \infty\big)$

„Die ‚Reihe' $\displaystyle\sum_{\nu=k}^{\infty}\alpha(\nu)$ ist konvergent": $\Longleftrightarrow$ $\sum\alpha$ *ist konvergent*

„Die ‚Reihe' $\displaystyle\sum_{\nu=k}^{\infty}\alpha(\nu)$ ist absolut konvergent": $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{\nu=k}^{\infty}\|\alpha(\nu)\|$ *konvergent;* usw.

17.1 Satz

Vor.: E *BR;* $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha\colon \mathbb{N}_k \longrightarrow E$, $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty}\alpha(\nu)$ *absolut konvergent*

Beh.: a) $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty}\alpha(\nu)$ *ist konvergent und* $\Big\|\sum\limits_{\nu=k}^{\infty}\alpha(\nu)\Big\| \le \sum\limits_{\nu=k}^{\infty}\|\alpha(\nu)\|$.

b) *Für* $\sigma\colon \mathbb{N}_k \longrightarrow \mathbb{N}_k$ *bijektiv ist*

$$\sum_{\nu=k}^{\infty}\alpha(\sigma(\nu)) \quad \begin{cases} \text{(absolut) konvergent} \\ = \sum\limits_{\nu=k}^{\infty}\alpha(\nu) \end{cases}.$$

Beweis: $s := \sum\alpha$

a): Für $n \in \mathbb{N}_k$ und $p \in \mathbb{N}$

$$\|s(n+p) - s(n)\| \;=\; \Big\|\sum_{\nu=n+1}^{n+p}\alpha(\nu)\Big\| \le \sum_{\nu=n+1}^{n+p}\|\alpha(\nu)\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty);$$

daher ist s eine CF; somit existiert eindeutig ein $c \in E$ mit $s(n) \longrightarrow c = \sum\limits_{\nu=k}^{\infty}\alpha(\nu)$ für $n \longrightarrow \infty$; dann gilt

$$\|c\| \longleftarrow \|s(n)\| \;\le\; \sum_{\nu=k}^{n}\|\alpha(\nu)\| \;\le\; \sum_{\nu=k}^{\infty}\|\alpha(\nu)\|, \quad \text{also} \quad \|c\| \;\le\; \sum_{\nu=k}^{\infty}\|\alpha(\nu)\|\,.$$

** Ich erinnere noch einmal an die Bezeichnung $\mathbb{N}_k := \{k, k+1, k+2, \dots\}$.

b): 1. Für $n \in \mathbb{N}_k$ gilt $\displaystyle\sum_{\nu=k}^{n} \|\alpha(\sigma(\nu))\| \;\le\; \sum_{j=k}^{\infty} \|\alpha(j)\| \;<\; \infty$;

dies zeigt: $\displaystyle\sum_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\sigma(\nu))$ ist absolut konvergent.

2. $t := \sum(\alpha \circ \sigma)$: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}_k$ mit

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \|\alpha(j)\| \le \varepsilon\,;$$

dazu existiert — da σ surjektiv ist — ein $M \in \mathbb{N}_k$ mit $\{k, \dots, N\} \subset \{\sigma(k), \dots, \sigma(M)\}$; offenbar gilt $M \ge N$. Für $\mathbb{N}_k \ni n > M$ folgt so

$$\|t(n) - s(n)\| \;=\; \left\| \sum_{j=k}^{n} \alpha(\sigma(j)) - \sum_{\nu=k}^{n} \alpha(\nu) \right\| \;\le\; \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \|\alpha(\nu)\| \;\le\; \varepsilon\,,$$

also $t(n) \longrightarrow c$. □

In einem BR folgt nach dem vorangehenden Satz aus der absoluten Konvergenz einer Reihe ihre Konvergenz. Diese Eigenschaft ist für die Vollständigkeit charakteristisch:

17.2 Satz

Vor.:	$\forall\, \alpha \in E^{\mathbb{N}}$: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha(\nu)$ *absolut konvergent* $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha(\nu)$ *konvergent*
Beh.:	*E ist ein BR.*

Beweis: Ist $(a_n) \in E^{\mathbb{N}}$ eine CF, dann existieren — nach Übung (5.2.b) — Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ derart, daß $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|a_{n_{j+1}} - a_{n_j}\| < \infty$; nach Voraussetzung existiert ein $c \in E$ mit $\sum\limits_{j=1}^{k-1} (a_{n_{j+1}} - a_{n_j}) \longrightarrow c$ für $k \longrightarrow \infty$; $\ell.\,S. = a_{n_k} - a_{n_1}$, also $a_{n_k} \longrightarrow c + a_{n_1} =: b$. Nach Übung (5.2.a) folgt dann: $a_n \longrightarrow b \;\; (n \longrightarrow \infty)$ □

„Neumann-**Reihe**“

Es sei $A = \big(A, a, s, m, e, \|\ \|\big)$ eine (B)-Algebra (über $\mathbb{K}$, mit Eins e)*

Bezeichnung

Für $x \in A$: $\quad x^0 := e\,, \quad x^{n+1} := x^n \cdot x \quad \big(n \in \mathbb{N}_0\big)$

* Für die folgenden Überlegungen genügt die Ringstruktur.

x *„Einheit“* $:\iff \exists\, y \in A \quad xy = e = yx \quad \left(\iff \dot{\exists}\ \ldots\quad\right)$; dann: $y =: x^{-1}$

$\mathfrak{I}(A) := \{x \in A : x \text{ Einheit}\}$

17.3 Trivialität $\big(\mathfrak{I}(A), m, e\big)$ *ist eine Gruppe.* *(‚Einheiten-Gruppe‘)*

17.4 Satz

Vor.: $x \in A$ *mit* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ *konvergent*

Beh.: $e - x \in \mathfrak{I}(A) \ \wedge\ (e-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

Anmerkung Die Voraussetzung in (17.4) ist — nach (17.1) — gegeben, falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x^n\| < \infty$, insbesondere also, falls $\|x\| < 1$. $\big($Beachten: $\|x^n\| \le \|x\|^n \quad (n \in \mathbb{N})\big)$

Beweis (zu (17.4)): Mit $s := \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

$$\begin{array}{ccccc} (e-x)\sum\limits_{j=0}^{n} x^j & \overset{\checkmark}{=} & \Big(\sum\limits_{j=0}^{n} x^j\Big)(e-x) & = & e - x^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (e-x)s & & s(e-x) & & e \end{array}$$

□

17.5 Folgerung

a) Die Abbildung $\mathfrak{I}(A) \ni x \longmapsto x^{-1} \in \mathfrak{I}(A)$ *ist stetig.*

b) $\mathfrak{I}(A)$ *ist offen (in A).*

Beweis:

α): Falls $x \in A$ mit $\|x\| < 1$ $\big(e - x \in \mathfrak{I}(A)$ und:$\big)$

$$\Big\|\,(e-x)^{-1} - \sum_{j=0}^{n} x^j\,\Big\| \le \frac{\|x\|^{n+1}}{1-\|x\|} \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$$

denn

$$\ell.\,S. \overset{(17.4)}{=} \Big\|\sum_{j=n+1}^{\infty} x^j\Big\| \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \|x\|^j = r.\,S.$$

β): Für $x \in \mathfrak{I}(A)$, $\alpha \in\,]0,1[$ und $h \in A$ mit $\|h\| \le \alpha \|x^{-1}\|^{-1}$ ist $x + h \in \mathfrak{I}(A)$ und

$$(*) \qquad \big\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\big\| \le \frac{1}{1-\alpha}\,\|x^{-1}\|^3\,\|h\|^2$$