denn $x + h = x(e + x^{-1}h)$:

$$\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\|\,\|h\| \leq \alpha \overset{(17.4)}{\Longrightarrow} e + x^{-1}h \in \mathfrak{J}(A), \text{ also } x + h \in \mathfrak{J}(A) \text{ und}$$
$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = \big[(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\big]x^{-1} :$$

mit $y := -x^{-1}h$ aus α) (für $n = 1$):

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \big\|(e-y)^{-1} - e - y\big\|\,\|x^{-1}\| \leq \frac{\|y\|^2}{1 - \|y\|}\,\|x^{-1}\| \leq r.\,S.$$

□

Aus (∗) liest man die Stetigkeit (und sogar die (F-)*Differenzierbarkeit*) der Inversenbildung

$$\mathfrak{J}(A) \ni x \longmapsto x^{-1} \in \mathfrak{J}(A)$$

(und den Wert der Ableitung) ab.

Nach (16.9) können wir dies alles anwenden auf $A := L(E, E)$ für einen BR E.

Beispiel E BR, $y \in E$, $A \in \mathfrak{J}(L(E,E)) =: \mathfrak{J}$
Gesucht ist ein $x \in E$ mit $Ax = y$.

Ist B ein *„Näherungsoperator“* für A, dann löst man oft ‚ersatzweise‘ die Gleichung $Bz = y$. Falls $\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$: $\|A^{-1}(A-B)\| < 1$, somit existiert — nach (17.4) — $\big(\mathrm{id}_E - A^{-1}(A-B)\big)^{-1}$ ($\in \mathfrak{J}$) und $\big($wegen $B = A(\mathrm{id}_E - A^{-1}(A-B))\big)$
$B^{-1} = (\mathrm{id}_E - A^{-1}(A-B))^{-1}A^{-1}$ ($\in \mathfrak{J}$); dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|z - x\| &= \big\|B^{-1}y - A^{-1}y\big\| \leq \big\|B^{-1} - A^{-1}\big\|\,\|y\| \\
&= \big\|\big((\mathrm{id}_E - A^{-1}(A-B))^{-1} - \mathrm{id}_E\big)A^{-1}\big\|\,\|y\| \overset{*}{\leq} \frac{\|A^{-1}(A-B)\|}{1 - \|A^{-1}(A-B)\|}\,\|A^{-1}\|\,\|y\| \\
&\leq \frac{\|A^{-1}\|^2\,\|A-B\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|A-B\|}\,\|y\| \qquad \textit{(Fehlerabschätzung)}
\end{aligned}$$

Speziell z. B. $E = \mathbb{R}^n$, A (n,n)-Matrix, $Ax = y$ *lineares Gleichungssystem,*
B Näherungsmatrix (z. B. reelle Zahlen durch abbrechende Dezimalzahlen oder ‚Maschinenzahlen‘ approximieren.)

Beispiel für ***nicht*** **beschränkte Operatoren der Quantenmechanik**

Mehrere Paare von ‚Operatoren‘ (P, Q) der Quantenmechanik erfüllen die

---

* s. Beweis zu (17.5) (α) mit $n = 0$)

Vertauschungsrelation

$$\boxed{PQ - QP \;=\; -i\hbar} \qquad \big(:= -i\hbar\,\mathrm{id}_E\big)$$

($\hbar$ Planck-Konstante)

$\big($z. B. $\quad P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ $\quad$ *‚Impulsoperator'* $\quad \big((Pu)(\xi) = -i\hbar u'(\xi)\big)$

$\qquad\quad Q = x$ $\quad$ *‚Ortsoperator'* $\quad \big((Qu)(\xi) = u(\xi)\cdot\xi\big)\big)$

Operatoren, die eine solche Vertauschungsrelation erfüllen, können *nicht* beide stetig sein; denn für $E \neq \{0\}$ hat man die:

17.6 Bemerkung

Vor.:	$P, Q \in \mathcal{L}(E,E),\ \ \alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\},\ \ PQ - QP \;=\; \alpha\,\mathrm{id}_E$
Beh.:	*Mindestens einer der Operatoren P und Q ist unstetig.**

Beweis: Annahme: Q stetig

(I) $\quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad PQ^n - Q^nP \;=\; \alpha\, n\, Q^{n-1}$

$n = 1$: nach Voraussetzung;

$n \rightsquigarrow n{+}1$:

$$\begin{aligned} PQ^{n+1} &= (PQ^n)Q \overset{\text{(Ind. Vor.)}}{=} (Q^nP + \alpha\, n\, Q^{n-1})Q \\ &= Q^n(PQ) + \alpha\, n\, Q^n \;=\; Q^n(QP + \alpha\,\mathrm{id}_E) + \alpha\, n\, Q^n \\ &= Q^{n+1}P + \alpha\,\big(n+1\big)Q^n \end{aligned}$$

(II) $\quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad Q^n \neq 0$

Falls $Q^n = 0$ (für ein $n \in \mathbb{N}$), — nach (I) — $Q^{n-1} = 0$ und so schließlich $(\mathrm{id}_E =)\ Q^0 = 0$ $\lightning$

(III)

$$\left.\begin{aligned} |\alpha|\, n\, \|Q^{n-1}\| &\overset{\text{(I)}}{\leq} 2\|P\|\,\|Q^n\| \\ &\leq 2\|P\|\,\|Q\|\,\|Q^{n-1}\| \\ \text{nach (II)}\ \ 0 < \|Q^{n-1}\|&, \\ \text{nach Voraussetzung}\ \ \|Q^{n-1}\| &< \infty \end{aligned}\right\} \implies \left\{\begin{aligned} &\text{(Für alle } n \in \mathbb{N}:) \\ &|\alpha|\, n \leq 2\|P\|\,\underbrace{\|Q\|}_{<\infty} \\ &\implies \|P\| = \infty \end{aligned}\right.$$

$\square$

18 Endlich-dimensionale normierte Vektorräume

18.1 Satz

Vor.:	$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},\ \big(E_j, \|\ \|_j\big)$ *NVR über* $\mathbb{K}$ $\quad (j = 1,2)$ $\dim E_1 \;=\; \dim E_2 \;=:\; n \in \mathbb{N}_0$
Beh.:	*E_1 und E_2 sind (als NVRe) isomorph.*

* In (18.3) werden wir sehen, daß dann der Raum E nicht endlich-dimensional sein kann.

18.2 Folgerung *Jeder endlich-dimensionale NVR über $\mathbb{K}$ ist ein BR.*

Beweis (zu (18.2)): Aus (18.1) mit der Vollständigkeit von $\big(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty\big)$ ablesen. $\square$

Beweis (zu (18.1)): Œ sei $n \in \mathbb{N}$; offenbar *genügt es zu zeigen,* daß der Raum $\big(E_1, \|\ \|_1\big)$ *(NVR-) isomorph zu* $\big(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty\big)$ ist:
Es sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von E_1; dann ist die Abbildung

$$\omega\colon \mathbb{K}^n \ni (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \longmapsto \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu b_\nu \in E_1 \quad \textit{ein algebraischer Isomorphismus.}$$

Mit $M := \sum\limits_{\nu=1}^{n} \|b_\nu\|_1$ ist für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$(*) \qquad \|\omega(\alpha)\|_1 \;\le\; \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|\, \|b_\nu\|_1 \;\le\; M\, \|\alpha\|_\infty$$

Die Einheitskugel $S := \big\{\alpha \in \mathbb{K}^n : \|\alpha\|_\infty = 1\big\}$ ist kompakt (z. B. nach (12.22)). Die Abbildung

$$\mathbb{K}^n \ni \alpha \longmapsto \|\omega(\alpha)\|_1 \in [0, \infty[$$

ist stetig (nach $(*)$, da ω linear ist); daher existiert ein $\alpha^* \in S$ mit $m := \|\omega(\alpha^*)\|_1 \le \|\omega(\alpha)\|_1$ für alle $\alpha \in S$; somit ist $m > 0$ mit $m\|\alpha\|_\infty \le \|\omega(\alpha)\|_1$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}^n$. $\square$

18.3 Bemerkung

Vor.:	$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\big(E_j, \|\ \|_j\big)$ *NVR über* $\mathbb{K}$ $\quad (j = 1, 2)$
	$\dim E_1 < \infty$, $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$
Beh.:	$T \in L(E_1, E_2)$

In Worten: □□□
Beweis: Œ sei $n := \dim E_1 \in \mathbb{N}$; mit einer Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von E_1 gilt für $\alpha \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} \Big\| T\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu b_\nu\Big)\Big\|_2 &= \Big\| \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu T b_\nu \Big\|_2 \le \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|\, \|T b_\nu\|_2 \\ &\le \|\alpha\|_\infty \sum_{\nu=1}^{n} \|T b_\nu\|_2 \end{aligned}$$

Über (18.1) folgt die Behauptung; denn mit der Abbildung ω aus dem Beweis zu (18.1) haben wir hier gezeigt:

$$\|T \circ \omega(\alpha)\|_2 \;\le\; \|\alpha\|_\infty \cdot S \quad \text{mit} \quad S := \sum_{\nu=1}^{n} \|T b_\nu\|_2$$

Also ist zunächst $T \circ \omega$ stetig. Da ω^{-1} stetig ist, folgt die Stetigkeit von T. $\square$
Mit (18.3) hat man so die:

18.4 Folgerung *Auf einem endlich-dimensionalen* $\mathbb{K}$*-VR sind alle Normen äquivalent.*

19 Quotienten- und Produkträume

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $(\mathfrak{R}, \| \ \|)$ ein HNVR (über $\mathbb{K}$) und $\mathfrak{N}$ ein Teilraum von $\mathfrak{R}$.
Durch

$$\varrho := \big\{(x,y) \in \mathfrak{R}^2 : \ x - y \in \mathfrak{N}\big\}$$

ist eine *Äquivalenzrelation* auf $\mathfrak{R}$ definiert mit $\varrho(a) = a + \mathfrak{N} =: \widehat{a}$ für $a \in \mathfrak{R}$.

$$\mathfrak{R}/_{\mathfrak{N}} := \mathfrak{R}/_{\varrho} \ = \ \big\{\varrho(a) : a \in \mathfrak{R}\big\} \ = \ \big\{a + \mathfrak{N} : a \in \mathfrak{R}\big\}$$

19.1 Bemerkung

Durch $\widehat{x} + \widehat{y} := \widehat{x+y}$, $\alpha\widehat{x} := \widehat{\alpha x}$ *für* $x, y \in \mathfrak{R}$ *und* $\alpha \in \mathbb{K}$ *wird* $\mathfrak{R}/_{\mathfrak{N}}$ *ein VR über* $\mathbb{K}$, *und die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{R}/_{\mathfrak{N}} \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \longmapsto & \widehat{x} \end{array}$$

ist linear und surjektiv.

Beweis: Aus der Linearen Algebra bekannt. $\square$

Definition $\|\widehat{x}\| := \|\widehat{x}\|_{\mathfrak{N}} := \inf\big\{\|v\| : v \in \widehat{x}\big\} \qquad \big(\widehat{x} \in \mathfrak{R}/_{\mathfrak{N}}\big)$

19.2 Satz

a) $\big(\mathfrak{R}/_{\mathfrak{N}} \| \ \|_{\mathfrak{N}}\big)$ *ist ein HNVR (über* $\mathbb{K}$*).*

b) $\pi\colon (\mathfrak{R}, \| \ \|) \longrightarrow \big(\mathfrak{R}/_{\mathfrak{N}}, \| \ \|_{\mathfrak{N}}\big)$ *ist stetig und offen.*

c) $\mathbb{O}(\| \ \|_{\mathfrak{N}})$ *ist gerade die Quotiententopologie auf* $\mathfrak{R}/_{\mathfrak{N}}$.

d) $\mathfrak{N}$ *abgeschlossen* $\iff$ $\| \ \|_{\mathfrak{N}}$ *Norm*

e) $\mathfrak{R}$ *BR* $\wedge$ $\mathfrak{N}$ *abgeschlossen* $\Longrightarrow$ $\mathfrak{R}/_{\mathfrak{N}}$ *BR*

Beweis: 0. Für $x \in \mathfrak{R}$ ist $\|\widehat{x}\| \le \|x\|$.

a): 1. Nach 0. (und Definition) $\| \ \|_{\mathfrak{N}} \colon \mathfrak{R}/_{\mathfrak{N}} \longrightarrow [0, \infty[$.

2. Für $v \in \widehat{x} \in \mathfrak{R}_{/\mathfrak{N}}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\|\alpha\,\widehat{x}\|_{\mathfrak{N}} \;=\; \|\widehat{\alpha\,x}\|_{\mathfrak{N}} \;\overset{(0.)}{\leq}\; \|\alpha v\| \;=\; |\alpha|\,\|v\|,$$

also $\|\alpha\widehat{x}\|_{\mathfrak{N}} \;\leq\; |\alpha|\,\|\widehat{x}\|_{\mathfrak{N}}$ und somit $(\square\square\square)$ ‚=‘.

3. Für $v \in \widehat{x} \in \mathfrak{R}_{/\mathfrak{N}}$ und $w \in \widehat{y} \in \mathfrak{R}_{/\mathfrak{N}}$:

$$\|\widehat{x}+\widehat{y}\|_{\mathfrak{N}} \;=\; \|\widehat{x+y}\|_{\mathfrak{N}} \;\leq\; \|v+w\| \;\leq\; \|v\|+\|w\|,$$

damit $\|\widehat{x}+\widehat{y}\|_{\mathfrak{N}} \;\leq\; \|\widehat{x}\|_{\mathfrak{N}}+\|\widehat{y}\|_{\mathfrak{N}}$.

b): Die Stetigkeit von π liest man aus 0. ab, da π linear ist. Für ein $\varepsilon > 0$ ist $\pi\big\{x \in \mathfrak{R} : \|x\| < \varepsilon\big\} \;=\; \big\{\widehat{x} \in \mathfrak{R}_{/\mathfrak{N}} : \|\widehat{x}\|_{\mathfrak{N}} < \varepsilon\big\}$ $\big($‚$\subset$‘: 0. ; ‚$\supset$‘: Definition von $\|\;\|_{\mathfrak{N}}\big)$; mit der Linearität von π folgt daher: π *offen*

c): nach b) $\big($und (6.2)$\big)$ hat man $\mathbb{O}(\|\;\|_{\mathfrak{N}}) \subset \mathbb{O}(\varrho)$. Für ein $Q \in \mathbb{O}(\varrho)$ ist — nach Definition $\mathbb{O}(\varrho)$ — $\pi^{-1}(Q) \in \mathbb{O}(\|\;\|)$, also — nach b) —

$$Q \overset{\pi \text{ surjektiv}}{=} \pi\big(\pi^{-1}(Q)\big) \in \mathbb{O}(\|\;\|_{\mathfrak{N}})\,.$$

d): *Zu zeigen* ist: Für $z \in \mathfrak{R}$ $\quad \|\widehat{z}\|_{\mathfrak{N}} = 0 \iff z \in \overline{\mathfrak{N}}$:

„$\Longleftarrow$“: Es existiert $(z_n) \in \mathfrak{N}^{\mathbb{N}}$ mit $z_n \to z$, also
$\widehat{0} = \pi(z_n) \to \pi(z) = \widehat{z} \implies \|\widehat{z}\|_{\mathfrak{N}} = 0\,.$

„$\Longrightarrow$“: Es existieren $z_n \in \widehat{z}$ $(n \in \mathbb{N})$ derart, daß $\|z_n\| \longrightarrow 0$, also $\underline{z_n} \longrightarrow 0\,.$
$z_n = z - v_n$ mit $v_n \in \mathfrak{N}$ geeignet, somit $v_n \longrightarrow z$, also $z \in \overline{\mathfrak{N}}\,.$

e): Es sei $(\widehat{x}_n) \in \big(\mathfrak{R}_{/\mathfrak{N}}\big)^{\mathbb{N}}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\widehat{x}_n\|_{\mathfrak{N}} < \infty$; es existieren dann $v_n \in \widehat{x}_n$ mit $\|v_n\| \leq \|\widehat{x}_n\|_{\mathfrak{N}} + \frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$; daher $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty$. Nach (17.1) ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ konvergent; da π stetig (und linear) ist, konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{x}_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi(v_n)$. Nach (17.2) folgt somit die Behauptung. $\square$

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\big(E_\nu, \|\;\|_\nu\big)$ NVRe über $\mathbb{K}$ $\quad (\nu = 1, \ldots, n)\,.$

$$E \;:=\; \prod_{\nu=1}^{n} E_\nu$$

ist dann (mit komponentenweise definierten Vektorraumoperationen) ein VR über $\mathbb{K}$.

Bezeichnung Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^p\Big)^{1/p} \quad 1 \le p < \infty$$
$$\|x\|_\infty := \max_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu$$

19.3 Satz

a) *Für* $1 \le p \le \infty$ *ist* $\|\ \|_p$ *eine Norm auf* E*.*

b) *Für* $r, s \in [1, \infty]$ *sind* $\|\ \|_r$ *und* $\|\ \|_s$ *äquivalent.*

c) $\|\ \|_\infty$ *(und damit* $\|\ \|_p$ *für* $1 \le p < \infty$*) liefert gerade die Produkttopologie.*

Beweis:

a): mit (0.3) (und (0.B2)) □□□

b): mit (18.4) (für $\mathbb{R}^n$) □□□

c): etwa mit (5.6.c) □□□ □

Nach Übung (4.4.d) ist das Produkt von *überabzählbar* vielen von $\{0\}$ verschiedenen NVRn nicht normierbar (da nicht metrisierbar); es gilt sogar:

19.4 Bemerkung

Vor.: I unendliche Menge, $\big(E_i, \|\ \|_i\big)$ *NVR über* $\mathbb{K}$ *mit* $E_i \neq \{0\}$ $(i \in I)$

Bez.: $E := \prod_{i \in I} E_i$ (mit komponentenweise definierten Vektoroperationen) VR über $\mathbb{K}$

Beh.: Es gibt keine *Norm auf* E*, die die Produkttopologie induziert.*

Beweis: Annahme: Es sei $\|\ \|$ eine Norm auf E mit $\mathbb{O}(\|\ \|) =$ Produkttopologie. Da $U := \{x \in E : \|x\| \le 1\}$ eine Nullumgebung ist, existieren $\varepsilon > 0$ und eine endliche Teilmenge J von I mit $V := \{(x_i) \in E : \forall\, i \in J\ \|x_i\|_i < \varepsilon\} \subset U$ $\big($man vergleiche dazu (5.6 c)$\big)$. Es seien nun $i_0 \in I \setminus J$, $y_i := 0$ für $i \in I \setminus \{i_0\}$, $y_{i_0} \in E_{i_0} \setminus \{0\}$, $y := (y_i)_I$. Dann ist $\alpha y \in V \subset U$ für $\alpha \in \mathbb{K}$, also $|\alpha|\, \|y\| \le 1$ und damit $y = 0$ ↯ □

20 ‚Der' Satz von Hahn-Banach

Eines der bemerkenswertesten und bedeutendsten Resultate der FA — sowohl vom theoretischen als auch vom angewandten Standpunkt aus — ist ‚der' Satz von Hahn-Banach. Er sichert unter anderem die Existenz hinreichend vieler Elemente von E' für (zum Beispiel) einen NVR E und ermöglicht damit eine ‚vernünftige' Dualitätstheorie.

20.1 Satz (Hahn-Banach)

Vor.: E *VR über* $\mathbb{R}$*,* M *Teilraum von* E

$$p\colon E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \quad p(x+y) \le p(x)+p(y) \qquad (x,y \in E)$$
$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \qquad (0<\alpha\in\mathbb{R}, x\in E)$$

*

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear mit } fz \le p(z) \quad (z\in M)$$

Beh.: *Es existiert eine Fortsetzung* $F\in E^*$ *von* f *mit*

$$-p(-x) \;\le\; Fx \;\le\; p(x) \text{ für } x\in E\,.$$

Beweis: Wir betrachten das folgende System von Fortsetzungen von f:

$$\mathfrak{Z} := \left\{(D,h) : \begin{array}{l} M\subset D \text{ Teilraum von } E,\\ h\colon D\longrightarrow\mathbb{R} \text{ linear,}\end{array} \quad h_{/M} = f,\ hz \le p(z) \ (z\in D)\right\}$$

Für zwei Paare (D_1,h_1)und (D_2,h_2) aus $\mathfrak{Z}$ sei:

$$(D_1,h_1) \le (D_2,h_2) :\Longleftrightarrow D_1\subset D_2 \wedge h_{2/D_1} = h_1$$

1. $(\mathfrak{Z},\le)$ *ist eine halbgeordnete Menge.*
2. $(M,f)\in\mathfrak{Z}$
3. Ist $\mathfrak{K}$ eine nicht-leere Kette in $(\mathfrak{Z},\le)$, so ist $K := \bigcup\limits_{(D,h)\in\mathfrak{K}} D$ ein M umfassender Teilraum von E; durch $kz := hz$, falls $(D,h)\in\mathfrak{K}$ mit $z\in D$ (Rechtfertigung: □□□), ist eine lineare Abbildung $k\colon K\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $k_{/M} = f$ und $kz\le p(z)$ für $z\in K$ definiert, also $(K,k)\in\mathfrak{Z}$. Offenbar ist (K,k) eine *obere Schranke* zu $\mathfrak{K}$. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein *maximales Element* (E_0,F) von $(\mathfrak{Z},\le)$. Für $x\in E_0$ ist $F(-x)\le p(-x)$, also $-p(-x)\le -F(-x) = Fx$.

   Daher ist nur noch *zu zeigen:* $E = E_0$:

   Annahme: Es existiert ein $y\in E\setminus E_0$; dann ist $H := \{x+\alpha y : x\in E_0, \alpha\in\mathbb{R}\}$ ein *Teilraum von* E *mit* $E_0\subsetneq H$. Mit festem $\gamma\in\mathbb{R}$ sei: $g(x+\alpha y) := Fx+\alpha\gamma$ (für $x\in E_0,\alpha\in\mathbb{R}$) ($g$ ist wohldefiniert: □□□); dann ist offenbar $g\colon H\longrightarrow\mathbb{R}$ linear mit $g_{/E_0} = F$. *Noch zu zeigen:*

   $\gamma\in\mathbb{R}$ kann *so gewählt werden, daß* $gz\le p(z)$ $(*)$ für $z\in H$ *gilt.*

   Dann hat man einen Widerspruch zur Maximalität von (E_0,F).

$$(*) \iff \forall x\in E_0\ \forall\alpha\in\mathbb{R} \quad Fx+\alpha\gamma \le p(x+\alpha y)$$

   $\alpha = 0$: ✓

[*] 1. Eigenschaft: *„subadditiv“*, 2. Eigenschaft: *„positiv homogen“*

$\alpha > 0$: Bedingung $\iff \forall\, x \in E_0 \quad \gamma \le p(\frac{x}{\alpha}+y) - F(\frac{x}{\alpha})$
$\alpha < 0$: Bedingung $\iff \forall\, x \in E_0 \quad F(\frac{x}{-\alpha}) - \gamma \le p(\frac{x}{-\alpha} - y)$
$\iff \forall\, x \in E_0 \quad F(-\frac{x}{\alpha}) - p(-\frac{x}{\alpha} - y) \le \gamma$

Für $u, v \in E_0$ gilt aber $Fu + Fv = F(u+v) \le p(u+v) \le p(u-y) + p(v+y)$, also

$$Fu - p(u-y) \le -Fv + p(v+y)\,;$$

daher $\quad a := \sup\{\ell.S. : u \in E_0\} \le b := \inf\{r.S. : v \in E_0\}$.

Für ein $a \le \gamma \le b$ gilt dann $(*)$. □

Neben der ‚transfiniten‘ Schlußweise ist der entscheidende Schritt die Fortsetzung um *eine* Dimension gewesen.

20.2 Satz (Hahn-Banach-Bohnenblust-Sobczyk-Suhomlinov)*

Vor.: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, *$E$ VR über $\mathbb{K}$, M Teilraum von E, p Halbnorm auf E,*
$f\colon M \longrightarrow \mathbb{K}$ linear mit $|fz| \le p(z)$ für $z \in M$

Beh.: Es existiert ein Fortsetzung $F \in E^*$ von f mit $|Fx| \le p(x)$ für $x \in E$.

Beweis:

1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: nach (20.1) unter Beachtung von
$-Fx = F(-x) \le p(-x) = p(x)$ für $x \in E$.

2. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Ist E ein $\mathbb{C}$-VR, dann ist E (mit eingeschränkter Skalar-Multiplikation) insbesondere auch ein $\mathbb{R}$-VR (und M ein $\mathbb{R}$-Unterraum davon, p ($\mathbb{R}$-)Halbnorm auf E). Wir betrachten $gz := \mathfrak{Re}\,(fz)$ für $z \in M$; dann gelten

(i) $g\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$-linear.

(ii) $fz = gz - ig(iz) \quad (z \in M) \quad (\square\square\square)$,

(iii) $|gz| = |\mathfrak{Re}\,(fz)| \le |fz| \le p(z) \quad (z \in M)$.

Nach dem 1. Fall existiert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $G\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, die Fortsetzung von g ist mit $|Gx| \le p(x)$ für $x \in E$. Wir betrachten
$Fx := Gx - iG(ix)$ für $x \in E$. Nach (ii) gilt $F_{/M} = f$.
$F\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear:
(Es genügt offenbar der Nachweis von $F(ix) = iF(x)$ für $x \in E$.) $(\square\square\square)$
Zu $x \in E$ existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ so, daß $\alpha Fx = |Fx|$; damit
$|Fx| = F(\alpha x) = G(\alpha x) \le p(\alpha x) = p(x)$. □

Im Folgenden sei wieder — wie ‚immer‘ — $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Hahn-Banach, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Bohnenblust-Sobczyk-Suhomlinov

20.3 Folgerung

Vor.:	$(E, \|\ \ \|)$ *NVR über* $\mathbb{K}$, M *Teilraum von* E, $f \in M'$
Beh.:	*Es existiert eine Fortsetzung* $F \in E'$ *von* f *mit* $\|F\| = \|f\|$.

Beweis: In (20.2) setzen wir für $x \in E$: $p(x) := \|f\|\,\|x\|$: $|Fx| \le p(x)$ zeigt $\|F\| \le \|f\|$. (Da F Fortsetzung von F ist, gilt trivialerweise:) $\|F\| \ge \|f\|$ □

20.4 Folgerung

Vor.:	$(E, \|\ \ \|)$ *NVR über* $\mathbb{K}$, $x_0 \in E$, M *Teilraum von* E, $d := d(x_0, M) > 0$ *
Beh.:	*Es existiert ein* $g \in E'$ *derart, daß* $\|g\| = 1$, $g_{/M} = 0$ *und* $g(x_0) = d$.

Anmerkung: Ist (unter den Voraussetzungen zu (20.4)) $g \in E'$ mit $\|g\| = 1$ und $g_{/M} = 0$, dann gilt

$$|g(x_0)| \ \le\ d\,;$$

denn für $y \in M$

$$|g(x_0)| \ =\ |g(x_0 - y)| \ \le\ \|x_0 - y\|\,.$$

Beweis zu (20.4): Wir betrachten den Teilraum von E:

$$H \ :=\ \big\{x + \alpha x_0 : x \in M, \alpha \in \mathbb{K}\big\}$$

Für $x \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ sei $f(x + \alpha x_0) := \alpha\, d$: Dann ist $f\colon H \longrightarrow \mathbb{K}$ linear (✓) mit $f_{/M} = 0$, $f(x_0) = d$ und

$$\begin{aligned}
\|f\| \ &=\ \sup\left\{\frac{|\alpha|\,d}{\|x + \alpha x_0\|} : x \in M, \alpha \in \mathbb{K} \text{ mit } x + \alpha x_0 \ne 0\right\}\\
&\overset{\checkmark}{\le}\ \sup\left\{\frac{d}{\|-y + x_0\|} : y \in M\right\} = 1
\end{aligned}$$

Mit (20.3) hat man dann die Behauptung. □

20.5 Folgerung

Vor.: E $\mathbb{K}$-*VR;* $x_0 \in E$

Beh.: a) *Ist* p *eine Halbnorm auf* E, *so existiert ein* $F \in E^*$ *mit* $Fx_0 = p(x_0)$ *und* $|Fx| \le p(x)$ *für* $x \in E$.

b) $E \ne \{0\}$, $\|\ \ \|$ *Norm auf* E $\Longrightarrow$ $\exists\, F \in E'$ *mit* $Fx_0 = \|x_0\| \wedge \|F\| = 1$

* $d(x_0, M) > 0$ bedeutet bekannterweise gerade: $x_0 \notin \overline{M}$

Beweis:

a): In (20.2) setzen wir: $M := \langle x_0 \rangle \quad \big(= \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}\big)$ und $f(\alpha x_0) := \alpha p(x_0)$ □□□

b): $\alpha)$ $x_0 \neq 0$: In (20.4): $M := \{0\}$ $\big($oder in a) $p := \|\ \|\big)$
$\beta)$ $x_0 = 0$: Wähle $z_0 \in E \setminus \{0\}$ und dazu F gemäß α). □

20.6 Folgerung

Vor.: $\big(E, \|\ \|\big)$ *NVR über* $\mathbb{K}$*;* $n \in \mathbb{N}$
$E \ni x_1, \ldots, x_n$ *linear unabhängig;* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

Beh.: Es existiert ein $g \in E'$ *mit* $g(x_\nu) = \alpha_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$.

Beweis: In (20.3): Zu $M := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ existiert eindeutig ein $f \in M^*$ mit $f(x_\nu) = \alpha_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$.; nach (18.3): $f \in M'$ □

Anwendungsbeispiel: *(Verallgemeinerter Grenzwert,* BANACH*-Limes)*

$E := \ell_\infty(\mathbb{R}) \quad \big(\text{mit } \|\ \|_\infty\big)$

Es existiert eine lineare Abbildung $\mathrm{LIM}\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ derart, daß

$$\liminf x_n \leq \mathrm{LIM}\, x \leq \limsup x_n$$

für alle $x = (x_n) \in E$ gilt. Insbesondere folgt also $\lim x_n = \mathrm{LIM}\, x$, *falls* (x_n) *konvergent ist.*

Beweis: $p(x) := \limsup x_n$ (für $x = (x_n) \in E$): p ist subadditiv und positiv homogen. $M := \{0\}, f := 0$. Nach (20.1) existiert $g \in E^*$ mit $gx \leq p(x)$ für $x \in E$. Dann ist für $x = (x_n) \in E$ auch

$$-gx \;=\; g(-x) \;\leq\; \limsup(-x_n) \;=\; -\liminf x_n, \text{ also } \liminf x_n \;\leq\; gx\,. \qquad \square$$

Noch erreichbar: Für $(x_n) \in E$ gilt $\mathrm{LIM}((x_n)) = \mathrm{LIM}((x_{n+1}))$; (siehe z. B. BERBERIAN)

21 Bidualraum, Reflexivität, Vervollständigung

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\big(E, \|\ \|\big)$ ein NVR über $\mathbb{K}$.
Nach (16.7) sind E' und $E'' := (E')'$ $\mathbb{K}$-BRe; E'' wird als *„Bidualraum“* bezeichnet.

Bezeichnung Für $x \in E$ sei

$$\varkappa x\colon E' \ni x' \longmapsto x'x \in \mathbb{K}\,.$$