Zunächst ist $\varkappa x\colon E' \longrightarrow \mathbb{K}$ linear. $|(\varkappa x)x'| = |x'x| \leq \|x'\|\,\|x\|$ zeigt $\|\varkappa x\| \leq \|x\|$. Mit (20.5 b) dann $\|\varkappa x\| = \|x\|$. Damit (✓):

21.1 Bemerkung

$\varkappa\colon E \longrightarrow E''$ ist linear mit $\|\varkappa x\| = \|x\|$ für $x \in E$.
Somit ist $\varkappa\colon E \longrightarrow \varkappa(E)$ ein Norm-Isomorphismus.

Bezeichnung $\varkappa$ heißt *„kanonische Einbettung"* (von E in E'').

Nach (8.7) läßt sich jeder MR — insbesondere also jeder NVR — ‚vervollständigen'. Für einen NVR möchte man natürlich auf der ‚Vervollständigung' auch wieder eine *Vektorraumstruktur* und eine *Norm* derart haben, so daß die Vervollständigung NVR — also BR — wird (und die Norm die gegebene Metrik liefert). Dies läßt sich — ausgehend von (8.7) — kanonisch ohne Schwierigkeiten machen. Ganz einfach — aber unter Benutzung des (nicht-trivialen) ‚Geschützes' „HAHN-BANACH" — geht das wie folgt:

21.2 Bemerkung *$\overline{\varkappa E}$ ist ein BR.* (eine *Vervollständigung* von E) ⟨Abschluß in E''⟩

Beweis: Nach (15.2.c) ist $\overline{\varkappa E}$ ein UR von E''; dieser ist vollständig, da ja der Raum E'' (als Dualraum) vollständig ist. □

Bezeichnung E *„reflexiv"*: $\iff$ $\varkappa E = E''$

Anmerkung: Die Existenz eines (beliebigen) Norm-Isomorphismus $\tau\colon E \longrightarrow E''$ ist *nicht* hinreichend für die Reflexivität von E: R. C. JAMES; z. B. in DAY p 72

21.3 Bemerkung *Ist E endlich-dimensional, dann ist E reflexiv.*

Beweis: Ist $\dim E =: n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt nach (18.3) $E' = E^*$, also (Lineare Algebra) $\dim E' = n$; somit gilt auch $\dim E'' = n$ (und $\dim \varkappa E = n$): Zusammen hat man: $\varkappa E = E''$. □

22 Uniform boundedness principle, Satz von Banach-Steinhaus

Wie üblich sei wieder $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

22.1 Satz (von der gleichmäßigen Beschränktheit; Uniform boundedness principle – UBP)

Vor.: *I nicht-leere Menge, $\big(E, \|\ \|\big)$ $\mathbb{K}$-BR, $\big(E_i, \|\ \|_i\big)$ $\mathbb{K}$-NVR,*
$T_i \in L(E, E_i) \quad (i \in I)$,
$\forall\, x \in E \ \big\{\|T_i\, x\|_i : i \in I\big\}$ beschränkt

Beh.: *$\big\{\|T_i\| : i \in I\big\}$ ist beschränkt.*

Anmerkung: Die Vollständigkeit von $(E, \| \ \|)$ ist wesentlich, wie Übung 10.1 zeigt.

Beweis: Für $i \in I$ sei $f_i \colon E \ni x \longmapsto \|T_i x\|_i \in [0, \infty[$ (stetig, da T_i und $\| \ \|_i$ stetig). Nach (10.3) und (10.5) existieren $a \in E$ und $\varepsilon, M \in]0, \infty[$ derart, daß

$$\forall i \in I \quad \forall x \in U_a^\varepsilon \quad \|T_i x\|_i = f_i(x) \leq M .$$

Ist $y \in E$ mit $\|y\| < 1$, dann gilt $a + \varepsilon y \in U_a^\varepsilon$, also für $i \in I$:
$\varepsilon \|T_i y\|_i = \|T_i(a+\varepsilon y) - T_i a\|_i \leq \|T_i(a+\varepsilon y)\|_i + \|T_i a\|_i \leq 2M$;
somit $\|T_i\| \leq \frac{2M}{\varepsilon}$ $(i \in I)$. □

22.2 Folgerung

Vor.: *I nicht-leere Menge, $(E, \| \ \|)$ $\mathbb{K}$-BR, $x_i' \in E'$ $(i \in I)$ so, daß $\{|x_i' x| : i \in I\}$ für alle $x \in E$ beschränkt ist.*

Beh.: *$\{\|x_i'\| : i \in I\}$ ist beschränkt.*

Beweis: ✓

22.3 Folgerung

Vor.: *I nicht-leere Menge, $(E, \| \ \|)$ $\mathbb{K}$-NVR, $x_i \in E$ $(i \in I)$ so, daß $\{|x' x_i| : i \in I\}$ für alle $x' \in E'$ beschränkt ist.*

Beh.: *$\{\|x_i\| : i \in I\}$ ist beschränkt.*

Beweis: (22.2) anwenden auf E' und $\varkappa x_i \in E''$ $(i \in I)$ ((21.1) beachten!) □

22.4 Satz (Banach-Steinhaus)

Vor.: *$(E_\nu, \| \ \|_\nu)$ $\mathbb{K}$-BR $(\nu = 1,2)$; $T_n \in L(E_1, E_2)$ $(n \in \mathbb{N})$; $M \subset E_1$ so, daß $\langle M \rangle$ dicht in E_1 ist.*

Beh.: ① $\forall x \in E_1$ $(T_n x)$ *konvergent*

$\Updownarrow$

② $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ *beschränkt* $\wedge$ $\forall u \in M$ $(T_n u)$ *konvergent*

22.5 Zusatz *Falls ① und* $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ $(x \in E_1)$: $T \in L(E_1, E_2)$

Beweis:

① $\Longrightarrow$ ②: $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ ist nach (22.1) beschränkt.

② $\Longrightarrow$ ①: $\forall\, u \in M\ (T_n u)$ konvergent $\overset{\checkmark}{\Longrightarrow}$ $\forall\, z \in \langle M\rangle\ \ (T_n z)$ konvergent; es sei $K \in \,]0,\infty[$ so, daß $\|T_n\| \le K\ (n \in \mathbb{N})$. Zu $x \in E_1$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $z \in \langle M\rangle$ mit $\|z-x\|_1 < \frac{\varepsilon}{4K}$, weiter existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_m z - T_n z\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m \ge N$:

$$\begin{aligned}\|T_n x - T_m x\|_2 &\le \|T_n x - T_n z\|_2 + \|T_n z - T_m z\|_2 + \|T_m z - T_m x\|_2 \\ &\le \|T_n\|\,\|x-z\|_1 + \qquad " \qquad + \|T_m\|\,\|x-z\|_1 \\ &\le K\cdot\|x-z\|_1 + \qquad " \qquad + K\cdot\|x-z\|_1 \ < \ \varepsilon\,;\end{aligned}$$

also ist $(T_n x)$ eine CF und damit konvergent. □

Beweis des Zusatzes: $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$: ✓

Für $x \in E_1$ (und K wie oben):

$$\|Tx\|_2 \longleftarrow \|T_n x\|_2 \ \le\ \|T_n\|\,\|x\|_1 \ \le\ K\,\|x\|_1\,,$$

also $\|T\| \le K$. □

Neben dem im Folgenden dargestellten Anwendungsbeispiel hat (22.4) viele weitere wichtige Anwendungen: z. B. FOURIER-*Entwicklung* (man vergleiche dazu etwa WLOKA, Seite 124 f) und (schwach-) *holomorphe BR-wertige Funktionen*.

Anwendungsbeispiel: („Quadraturformeln"; Numerische Integration)

Es seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Gesucht: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Das ‚Standard-Verfahren' $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ für eine Stammfunktion F von f ist recht *häufig nicht* (numerisch) *brauchbar oder nicht angemessen*; sei es, weil die explizite ‚Berechnung' von F nicht gelingt, sei es, weil F sich nicht als elementare und nicht im benötigten Umfang ‚tabellierte' Funktion herausstellt, sei es aber auch, weil die Bestimmung und Auswertung von F einen solchen *Aufwand* verursacht, daß man nach bequemeren Verfahren suchen wird. Dieser letzte Fall tritt häufig bereits bei der *Integration rationaler Funktionen* auf. Aufgrund der Charakterisierung des RIEMANN-Integrals läßt sich $i(f) := \int\limits_a^b f(x)\,dx$ beliebig genau durch eine endliche Linearkombination von Funktionswerten

$$\sum_{\kappa=0}^{k} \lambda_\kappa\, f(x_\kappa)$$

(mit $x_\kappa \in [a,b]$) approximieren. In der numerischen Mathematik werden Näherungsformeln dieser Art hergeleitet und ihre Eigenschaften untersucht. Die Verwendung solcher Formeln ist auch noch sinnvoll, *wenn die Funktion nur an bestimmten Stellen x_k* — etwa aufgrund von Messungen oder als numerische Lösung einer Differentialgleichung — *bekannt ist.*

Bezeichnung Es seien $n \in \mathbb{N}_0$, $x_\nu \in [a,b]$ paarweise verschieden und $\lambda_\nu \in \mathbb{R}$ für $\nu = 0,\dots,n$. Dann heißt das durch

$$q(f) \ :=\ \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu\, f(x_\nu) \qquad \big(f \in C^{\mathbb{R}}[a,b]\big)$$

definierte Funktional q *„Quadraturformel“ („n-ter Ordnung“)* mit den *„Stützstellen“* x_ν und den *„Gewichten“* λ_ν. Eine Folge (q_k) von Quadraturformeln heißt *„Quadraturverfahren“*, wenn die Folge der zugehörigen Ordnungen isoton ist.

22.6 Satz (Szegö)

Vor.: *Es seien (q_k) ein Quadraturverfahren und dazu $\lambda_0^{(k)},\dots,\lambda_{n_k}^{(k)}$ die Gewichte von q_k für $k \in \mathbb{N}$.*

Beh.:
$$\forall\, f \in C^{\mathbb{R}}[a,b] \quad q_k(f) \longrightarrow i(f) \quad (k \longrightarrow \infty)$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \forall\, m \in \mathbb{N}_0 \quad q_k(\mathbf{x}^m) \longrightarrow i(\mathbf{x}^m) \quad (k \longrightarrow \infty) \\ \wedge\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sum\limits_{\nu=0}^{n_k} |\lambda_\nu^{(k)}| \ < \ \infty \end{cases}$$

Beweis: Nach dem Satz von Weierstrass (Übung (5.1.c)) erfüllt $M := \{\mathbf{x}^m : m \in \mathbb{N}_0\}$ die Voraussetzung von (22.4) $\big($mit $E_1 := (C^{\mathbb{R}}[a,b], \|\|_\infty)\big)$. Nach (22.4) genügt daher *zu zeigen:*

$\|q\| \ = \ \sum\limits_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|$ für eine Quadraturformel $q(f) := \sum\limits_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu)\ (\dots)$.

$\leq$: ✓

$\geq$: Es existiert ein $f \in C^{\mathbb{R}}[a,b]$ mit $\|f\|_\infty = 1$ und $f(x_\nu) = \operatorname{sign}\lambda_\nu$ (✓); damit

$q(f) \ = \ \sum\limits_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|$ $\quad\big($Noch beachten: $i \in (C^{\mathbb{R}}[a,b])'\big)$ □

22.7 Folgerung (Steklov)

Sind in (22.6) alle Gewichte $\lambda_j^{(k)}$ nicht-negativ, dann gilt:
$$\forall\, f \in C^{\mathbb{R}}[a,b] \quad q_k(f) \longrightarrow i(f) \quad (k \longrightarrow \infty)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 \quad q_k(\mathbf{x}^m) \longrightarrow i(\mathbf{x}^m) \quad (k \longrightarrow \infty)$$

Beweis:
$$\sum_{j=0}^{n_k} |\lambda_j^{(k)}| \ = \ \sum_{j=0}^{n_k} \lambda_j^{(k)} \ = \ q_k(\mathbf{x}^0) \longrightarrow i(\mathbf{x}^0) \ = \ b-a \quad (k \longrightarrow \infty)$$
□

Anmerkungen:

① Ist q eine Quadraturformel (von o. a. Typ) mit $q(\mathbf{x}^0) \ = \ i(\mathbf{x}^0)$, dann gilt $\|i-q\| \geq b-a$. Eine *gleichmäßige Approximation* durch solche Quadraturformeln ist also *nicht* möglich.

Beweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in C^{\mathbb{R}}[a,b]$ mit $g(x_\nu) = \operatorname{sign}\lambda_\nu$, $\|g\| \leq 1$ und $|i(g)| \leq \varepsilon$ (✓): □□□ □

② Durch die Forderung $q(P) = i(P)$ für alle Polynome P mit Grad $\leq n$ wird *bei vorgegebenen Stützstellen* eindeutig eine Quadraturformel (von o. a. Typ) n-ter Ordnung bestimmt. ($\rightsquigarrow$ *„interpolatorische“* Quadraturformel) [z. B. mit LAGRANGE-Darstellung von P]

③ Für NEWTON-COTES-Formeln (in ② äquidistante Stützstellen) ist (22.5) *nicht anwendbar* (Gegenbeispiel von POLYA). Für GAUSS-*Formeln* sind Gewichte nichtnegativ (also (22.6) *anwendbar*).

23 Open mapping principle; closed graph theorem

23.1 Satz von der offenen Abbildung; open mapping principle

Vor.: $(E_\nu, \|\ \|_\nu)$ $\mathbb{K}$-*BR* $(\nu = 1, 2)$, $A \in L(E_1, E_2)$ *mit* $AE_1 = E_2$

Beh.: A ist offen.

Beweis: Wir zeigen zunächst:

a): Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\{y \in E_2 : \|y\|_2 < \varepsilon\} \subset \{Ax : x \in E_1 \wedge \|x\|_1 < 1\}$:

$$S_n := \{x \in E_1 : \|x\|_1 < 2^{-n}\} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Aus $AE_1 = E_2$ und $E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} kS_1$ folgt $E_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\,AS_1$. E_2 ist von 2. Kategorie (nach (10.4)), daher existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k\overset{\circ}{\overline{AS_1}} \overset{(15.3.\beta)}{=} \overset{\circ}{\overline{k\,AS_1}} \neq \emptyset$; somit existieren ein $p \in E_2$ und ein $\eta \in \,]0, \infty[$ mit $\{y \in E_2 : \|y - p\|_2 < \eta\} \subset \overline{AS_1}$; dann

$\{z \in E_2 : \|z\|_2 < \eta\} \subset \overline{AS_1} - p \subset \overline{AS_1} - \overline{AS_1} \overset{(-\text{ stetig})}{\subset} \overline{AS_1 - A.S_1} \subset \overline{AS_0}$.

Daher — wieder mit (15.3.β) —

(1) $$\{v \in E_2 : \|v\|_2 < \eta \cdot 2^{-n}\} \subset \overline{AS_n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Behauptung: $\varepsilon := \eta/2$ tut's: Zu $y \in E_2$ mit $\|y\|_2 < \eta/2$ existiert nach (1) ein $x_1 \in S_1$ mit $\|y - Ax_1\|_2 < \eta 2^{-2}$, dazu existiert dann (wieder nach (1)) ein $x_2 \in S_2$ so, daß $\|(y - Ax_1) - Ax_2\|_2 < \eta 2^{-3}$ und (induktiv) für $n \in \mathbb{N}$: $x_n \in S_n$ derart, daß

(2) $$\Big\| y - \sum_{\nu=1}^{n} Ax_\nu \Big\|_2 < \eta 2^{-(n+1)}$$

Da $\|x_\nu\|_1 < 2^{-\nu}$ gilt und $(E_1, \|\ \|_1)$ BR ist, hat man die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu =: x$ mit $x \in S_0$ und $Ax = \sum_{\nu=1}^{\infty} Ax_\nu \overset{(2)}{=} y$.

b): Es seien nun $E_1 \supset O$ offen und $b \in AO$: Zu einem $a \in O$ mit $b = Aa$ existiert ein $0 < \delta < \infty$ so, daß $\underbrace{\{x \in E_1 : \|x-a\|_1 < \delta\}}_{= \delta S_0 + a} \subset O$; mit ε gemäß a):

$$\mathbb{U}_b^{(2)} \ni \{v \in E_2 : \|v\|_2 < \delta\varepsilon\} + b \subset A(\delta S_0 + a) \subset AO\,.$$

□

23.2 Satz vom inversen Operator

Vor.: $(E_\nu, \|\ \|_\nu)$ $\mathbb{K}$-*BR* $(\nu = 1,2)$, $T \in L(E_1, E_2)$ *bijektiv*

Beh.: T^{-1} *ist stetig, also* T *ein (NVR-) Isomorphismus.*

Beweis: nach (23.1) ist T offen (und bijektiv, stetig), nach (7.1) also T^{-1} stetig. □

23.3 Folgerung

Vor.: $(E, \|\ \|_\nu)$ $\mathbb{K}$-*BR* $(\nu = 1,2)$, $\alpha \in]0, \infty[$, $\|\ \|_2 \le \alpha \|\ \|_1$

Beh.: $\|\ \|_1$ *und* $\|\ \|_2$ *sind äquivalent.*

Beweis: (23.2) anwenden auf $T := \mathrm{id}_E$: Die Stetigkeit von

$$\mathrm{id} = \mathrm{id}^{-1} : (E, \|\ \|_2) \longrightarrow (E, \|\ \|_1)$$

zeigt $\|x\|_1 = \|\mathrm{id}\, x\|_1 \le \|\mathrm{id}\|\, \|x\|_2$ für $x \in E_2$. □

Sind $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$, $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ TRe und $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$, dann betrachten wir mit

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in \mathfrak{R}\} \qquad \text{den „}\textit{Graphen (von } f\textit{)}\text{“.}$$

f heißt *„Graphen-abgeschlossen“*: $\iff$ $G(f)$ abgeschlossen (in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$)

23.4 Bemerkung $\mathfrak{S}$ *HdR* $\wedge$ f *stetig* $\Longrightarrow$ f *Graphen-abgeschlossen*

Beweis: Ist $(a,b) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \setminus G(f)$, also $b \ne f(a)$, dann existieren ein $V_1 \in \mathbb{U}_b$ und ein $V_2 \in \mathbb{U}_{f(a)}$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$: Es existiert dazu ein $U \in \mathbb{U}_a$ mit $f(U) \subset V_2$, dann $\mathbb{U}_{(a,b)} \ni U \times V_1 \subset \mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \setminus G(f)$. □

Es seien jetzt $(E_\nu, \|\ \|_\nu)$ $\mathbb{K}$-NVR $(\nu = 1,2)$ und $T : E_1 \longrightarrow E_2$.

23.5 Bemerkung

T *Graphen-abgeschlossen*

$\Updownarrow$

$\forall\, (x_n) \in E_1^{\mathbb{N}}\ \forall\, x \in E_1\ \forall\, y \in E_2\ [x_n \longrightarrow x \wedge Tx_n \longrightarrow y] \Longrightarrow Tx = y$

Beweis: Für $(x,y) \in E_1 \times E_2$:

$$(x,y) \in \overline{G(T)} \iff \exists\,\big((x_n,y_n)\big) \in G(T)^{\mathbb{N}} \quad (x_n,y_n) \longrightarrow (x,y)$$
$$\iff \exists\,(x_n) \in E_1^{\mathbb{N}} \;\; x_n \longrightarrow x \;\wedge\; Tx_n \longrightarrow y$$

Hieraus liest man die Behauptung ab. □

Anmerkung *Ist T nicht stetig, dann kann eine Folge $(x_n) \in E_1^{\mathbb{N}}$ konvergent sein, ohne daß die Folge der Bilder (Tx_n) konvergent ist:*

Beispiel

$$E_1 := E_2 := \mathbb{R} \;\big(\text{mit } |\;| \text{ wie üblich}\big),\; Tx := \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases},\quad x_n := \frac{1}{n} \;\; (n \in \mathbb{N});$$

T ist *Graphen-abgeschlossen*, jedoch *nicht stetig*. Zudem ist T nicht ‚abgeschlossen' in dem Sinne, daß abgeschlossene Mengen jeweils abgeschlossene Bilder haben: Dies zeigt etwa: $T\big([1,\infty[\big) =]0,1]$

23.6 Satz vom abgeschlossenen Graphen closed graph theorem

Vor.: $\big(E_\nu, \|\;\|_\nu\big)$ $\mathbb{K}$-BR $\quad (\nu = 1,2)$, $\;T \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$

Beh.: $T \in L(E_1,E_2) \iff T$ *Graphen-abgeschlossen*

Beweis: „$\Longrightarrow$": nach (23.4)

„$\Longleftarrow$": $G(T)$ ist ein $\mathbb{K}$-BR als abgeschlossener UR von $E_1 \times E_2$ ($E_1 \times E_2$ ist ein $\mathbb{K}$-BR mit $|||(x,y)||| := \|x\|_1 + \|y\|_2$). Wir betrachten die

$$\text{Abbildung} \quad \varphi\colon G(T) \ni (x,Tx) \longmapsto x \in E_1\,.$$

Diese ist linear, stetig und bijektiv; nach (23.2) ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon E_1 \ni x \longmapsto (x,Tx) \in G(T)$ stetig und somit auch T. □

Beispiel (man vergleiche Seite 55)

$E_1 := C_1^{\mathbb{R}}[0,1]$, $E_2 := C^{\mathbb{R}}[0,1]$; beide mit $\|\;\|_\infty$

$D\colon E_1 \ni f \longmapsto f' \in E_2$ *linear*, *nicht stetig*, aber *Graphen-abgeschlossen*:

$(f_n) \in E_1^{\mathbb{N}}$, $f \in E_1$, $g \in E_2$ so, daß $f_n \longrightarrow f \;\wedge\; f_n' \longrightarrow g \overset{(\text{A I, (6.7.5)})}{\Longrightarrow} f' = g$

Dies steht nicht im Widerspruch zu (23.6), da $\big(E_1, \|\;\|_\infty\big)$ kein BR ist.

23.7 Es seien $(E, \| \ \|)$ ein $\mathbb{K}$-BR und E_ν *abgeschlossene URe* von E $(\nu = 1, 2)$ mit
$E = E_1 + E_2$ und $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Für $x \in E$ *existieren* dann *eindeutig* $x_\nu \in E_\nu$ mit $x = x_1 + x_2$; die Abbildung

$$T\colon E_1 \times E_2 \ni (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2 \in E$$

ist daher (linear und) bijektiv.

Wegen $\|T(x_1, x_2)\| = \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ ist T auch stetig (bei 0); nach (23.2) ist somit T ein *(NVR-) Isomorphismus*

23.8 Sind $(E, \| \ \|)$ ein $\mathbb{K}$-BR und $P\colon E \longrightarrow E$ ein *„Projektor“*,
d. h.: $P \in L(E, E)$ mit $P^2 := P \circ P = P$, dann ist auch $Q := \mathrm{id}_E - P$ ein *Projektor*. Mit diesem gilt: $PQ = 0$, $P + Q = \mathrm{id}_E$ und $E_1 := PE$, $E_2 := QE$ erfüllen die Voraussetzung von (23.7).
$\big(E_1 = \text{Kern } Q,\ E_2 = \text{Kern } P$: abgeschlossen; Rest: □□□ $\big)$

24 Schwache Topologien; Satz von Alaoglu

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E = (E, a, s)$ ein $\mathbb{K}$-VR und $\Gamma \subset E^*$.

Gesucht ist die gröbste Topologie auf E derart, daß $\varphi\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig ist für alle $\varphi \in \Gamma$, also — man vergleiche Abschnitt 5 — die zugehörige initiale Topologie. Wir bezeichnen diese als *„Γ-Topologie“* oder mit „$\sigma(\Gamma)$“ oder genauer „$\sigma(E, \Gamma)$“.

Unmittelbar aus der Definition liest man ab:

$$\sigma(\Gamma) = \sigma(\langle \Gamma \rangle)$$

Bezeichnung Γ *„total“* $:\iff \forall\, x \in E \setminus \{0\}\ \exists\, \varphi \in \Gamma\ \ \varphi x \neq 0$

Zusätzlich zu den allgemeinen Überlegungen aus 5. ist hier noch die ‚Linearität‘ zu berücksichtigen.

Für $p \in E$ und $U \subset E$ gilt — nach (5.1.c) —

U ist $\big(\sigma(\Gamma)\text{-}\big)$Umgebung von p genau dann, wenn $U \supset \bigcap\limits_{\varphi \in A} \varphi^{-1}(U_\varphi)$ mit $\Gamma \supset A$ endlich und $U_\varphi \in \mathbb{U}^{\mathbb{K}}_{\varphi p}$ für $\varphi \in A$, also offenbar genau dann, wenn $U \supset \bigcap\limits_{\varphi \in A} \varphi^{-1}(U^\varepsilon_{\varphi p})$ mit $\Gamma \supset A$ endlich und $\varepsilon \in \,]0, \infty[$.

Für $\Gamma \supset A$ endlich, $\varepsilon \in \,]0, \infty[$ und $p \in E$:

$$\bigcap_{\varphi \in A} \varphi^{-1}(U^\varepsilon_{\varphi p}) = \big\{x \in E : \forall\, \varphi \in A \quad |\varphi x - \varphi p| < \varepsilon\big\} =: U(p; A, \varepsilon)$$

Für $x \in E$ gilt: $x \in U(p; A, \varepsilon) \iff \forall\, \varphi \in A\ \ \varphi x \in U^\varepsilon_{\varphi p}$.

24.0 $U(p; A, \varepsilon) = U(0; A, \varepsilon) + p$

Die Γ-Topologie ist daher schon völlig bestimmt durch die Umgebungsbasis von 0:

$$\big\{U(0;A,\varepsilon) : \Gamma \supset A \text{ endlich}, \varepsilon \in]0,\infty[\big\}$$

24.1 Trivialität *Für* $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset E^*$*:* $\quad \sigma(\Gamma_1) \subset \sigma(\Gamma_2)$

24.2 Bemerkung *Mit* $\sigma := \sigma(\Gamma)$ $\quad \alpha)$ $a\colon (E,\sigma)\times(E,\sigma) \longrightarrow (E,\sigma)$ *ist stetig.*

$\beta)$ $s\colon \mathbb{K}\times(E,\sigma) \longrightarrow (E,\sigma)$ *ist stetig.*

$\gamma)$ Γ *total* $\implies$ (E,σ) *HdR*

Beweis: Für $p,q\in E, \beta\in\mathbb{K}, \Gamma\supset A$ endlich und $\varepsilon>0$:

$\alpha)$: $U(p;A,\varepsilon/2)+U(q;A,\varepsilon/2)\subset U(p+q;A,\varepsilon)$

$\beta)$: Die Stetigkeit der Multiplikation in $\mathbb{K}$ liefert: Zu $\varphi\in A$ existiert $\eta=\eta(\varphi)>0$ so, daß $U^\eta_\beta\cdot U^\eta_{\varphi p}\subset U^\varepsilon_{\beta\varphi p}$; da A endlich ist, existiert $\delta:=\min\limits_{\varphi\in A}\eta(\varphi)$ (>0); damit gilt: $\forall\,\varphi\in A\ \ U^\delta_\beta\cdot U^\delta_{\varphi p}\subset U^\varepsilon_{\beta\varphi p}=U^\varepsilon_{\varphi(\beta p)}$; das zeigt $U^\delta_\beta\cdot U(p;A,\delta)\subset U(\beta p;A,\varepsilon)$.

$\gamma)$: Falls $p\neq q$: Es existiert $\varphi\in\Gamma$ so, daß $|\varphi p-\varphi.q|=|\varphi(p-q)|=:2\varepsilon>0$, damit: $U\big(p;\{\varphi\},\varepsilon\big)\cap U\big(q;\{\varphi\},\varepsilon\big)\ =\emptyset$ $\square$

24.3 Bemerkung

$$\boxed{\begin{array}{l}\textit{Vor.: } x\in E,\ \mathbb{F}\ \textit{FB auf } E\\[1ex] \textit{Beh.: } \mathbb{F}\longrightarrow x\ \ \big(\sigma(\Gamma)\big)\iff \forall\,\varphi\in\Gamma\ \ \varphi\mathbb{F}\longrightarrow\varphi x\end{array}}$$

Dabei natürlich $\varphi\mathbb{F}:=\varphi(\mathbb{F})$ (Bild von $\mathbb{F}$ unter φ).

Beweis:
$$\begin{aligned}\ell.\,S. &\iff \mathbb{U}^\sigma_x\le\mathbb{F}\iff\forall\,U\in\mathbb{U}^\sigma_x\ \exists\,F\in\mathbb{F}\ \ F\subset U\\ &\iff \forall\,A\ (\text{endlich}, \subset\Gamma)\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,F\in\mathbb{F}\ \ F\subset U(x;A,\varepsilon)\\ &\overset{\checkmark}{\iff} \forall\,\varphi\in\Gamma\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,F\in\mathbb{F}\ \ F\subset U\big(x;\{\varphi\},\varepsilon\big)\\ &\iff \forall\,\varphi\in\Gamma\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,F\in\mathbb{F}\ \ \varphi F\subset U^\varepsilon_{\varphi x}\iff r.\,S.\end{aligned}$$ $\square$

24.4 Folgerung

$$\boxed{\begin{array}{l}\textit{Vor.: } x\in E,\ (x_n)\in E^{\mathbb{N}}\\[1ex] \textit{Beh.: } x_n\longrightarrow x\ \ \big(\sigma(\Gamma)\big)\iff \forall\,\varphi\in\Gamma\ \varphi x_n\longrightarrow\varphi x\end{array}}$$

24.5 Bemerkung *Vor.:* $(E,\|\ \|)$ $\mathbb{K}$*-NVR*

Beh.: $\alpha)$ E' *ist total.*

$\beta)$ $\varkappa E$ *ist total.* *(für* E'*)*

$\gamma)$ $\sigma(E,E')\subset\mathbb{O}(\|\ \|)$

Beweis: α): nach (20.5.b) β): trivial

γ): $\varphi \in E'$ bedeutet gerade $\big(\varphi \in E^*$ und$\big)$ $\varphi\colon \big(E, \mathbb{O}(\|\ \|)\big) \longrightarrow \big(\mathbb{K}, |\ |\big)$ stetig, also folgt die Behauptung nach Definition von $\sigma(E, E')$. □

Bezeichnung Ist $\big(E, \|\ \|\big)$ ein $\mathbb{K}$-NVR, dann bezeichnet man

$\mathbb{O}(\|\ \|)$ als *„Norm-Topologie"* oder *„starke Topologie"*,

$\sigma(E, E')$ als *„schwache Topologie"* und

$\sigma(E', E) := \sigma(E', \varkappa E)$ als *„E-Topologie"* oder *„schwach$*$-Topologie"*.

Nach (24.1) und (24.5.γ) hat man:

24.6 $\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'') \subset \underbrace{\mathbb{O}(\|\ \|)}_{\text{Operatornorm}}$

Nach (24.5) ist (in einem NVR) insbesondere *jede stark-konvergente Folge auch schwach-konvergent. Die Umkehrung gilt i. a. nicht:*

Beispiel Wir betrachten den Raum ℓ_2 $\big($mit der Norm $\|\ \|_2\big)$ und darin die Vektoren $\mathfrak{e}_n := (\delta_{j,n})_{j\in\mathbb{N}}$ $\big(n \in \mathbb{N}\big)$. Dann gilt $\|\mathfrak{e}_n - \mathfrak{e}_m\|_2 = \sqrt{2}$ für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Für $\varphi \in \ell_2'$ existiert — nach Übung (10.3.b) — ein $a = (a_n) \in \ell_2$ so, daß $\varphi z = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j z_j$ für $z = (z_n) \in \ell_2$, folglich $\varphi\mathfrak{e}_n = a_n \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$.

24.7 Satz $\boxed{\langle\Gamma\rangle = \big\{\varphi \in E^* \,|\, \varphi\colon \big(E, \sigma(\Gamma)\big) \longrightarrow \mathbb{K}\ \textit{stetig}\big\}}$

Nach der Definition von $\sigma(\Gamma)$ hat man $\Gamma \subset \{\ldots\}$, also auch $\langle\Gamma\rangle \subset \{\ldots\}$. Für die andere Inklusion zeigen wir zunächst den

24.8 Hilfssatz

Vor.: $n \in \mathbb{N};\ g, f_1, \ldots, f_n \in E^*;\ g \notin \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$
Beh.: Es existiert ein $a \in E$ *mit* $g(a) = 1$ *und* $f_1(a) = \cdots = f_n(a) = 0$.

Beweis (des Hilfssatzes): *Sonst* $\bigcap\limits_{\nu=1}^{n} \operatorname{Kern} f_\nu \subset \operatorname{Kern} g$ ①

Wir betrachten die Abbildung

$$T\colon E \ni x \longmapsto (f_1 x, \ldots, f_n x) \in \mathbb{K}^n;$$