nach ① hat man für $v, w \in E$:

$$Tv = Tw \implies gv = gw$$

Daher wird durch $\psi(Tx) := gx$ für $x \in E$ auf dem UR *TE* von $\mathbb{K}^n$ eine $\mathbb{K}$-wertige Abbildung $\psi$ definiert, die offenbar *linear* ist. Zu $\psi$ existiert eine Fortsetzung $\varphi \in (\mathbb{K}^n)^*$ (✓) und dazu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ derart, daß $\varphi z = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu z_\nu$ für $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$. Für $x \in E$ hat man also $gx = \psi(Tx) = \varphi(Tx) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu f_\nu(x)$ im Widerspruch zu $g \notin \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$. □

*Beweis* von (24.7; „$\supset$"): Für $\varphi \in r.\,S.$ existieren, da $\varphi$ stetig ist mit $\varphi 0 = 0$, $\Gamma \supset A$ endlich und $\delta > 0$ so, daß

② $$\varphi U(0; A, \delta) \subset U_0^1 .$$

Für $x \in \bigcap\limits_{\psi \in A} \operatorname{Kern} \psi$ und beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gilt $mx \in U(0; A, \delta)$, also nach ②: $m|\varphi x| = |\varphi(mx)| < 1$; somit $\varphi x = 0$. Nach dem Hilfssatz folgt $\varphi \in \langle A \rangle \quad \big(\subset \langle \Gamma \rangle\big)$. □

### Beziehung zur Produkttopologie

**24.9** Es sei $\Gamma$ eine *totale* Teilmenge von $E^*$; dazu betrachten wir

$$\mathfrak{S} = \prod_{\Gamma} \mathbb{K} = \mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{K}) \qquad \big(\text{mit Produkttopologie } \mathbb{P}\big)$$

und $\tau \colon E \longrightarrow \mathfrak{S}$, definiert

durch $(\tau x)(\varphi) := \varphi x \quad (x \in E, \varphi \in \Gamma)$.

Dann gelten:

*a) $\mathfrak{S}$ ist ein $\mathbb{K}$-VR und $\tau$ ein Monomorphismus.*

*b) Die Abbildung $\tau \colon \big(E, \sigma(\Gamma)\big) \longrightarrow \big(\tau E, \mathbb{P}_{\tau E}\big)$ ist topologisch.*

*Beweis:*

a): $\mathfrak{S}$ $\mathbb{K}$-VR und $\tau$ linear: ✓ $\tau$ ist injektiv, da $\Gamma$ total ist.

b): nach der Definition von $\sigma(\Gamma)$ und der Produkttopologie (jeweils als entsprechende initiale Topologie) □□□ □

### 24.10 Lemma

*Vor.: $E$ $\mathbb{K}$-VR und $c \colon E \longrightarrow [0, \infty[$*

*Beh.: $\big\{ f \in E^* : \forall\, x \in E \quad |f x| \le c(x) \big\}$ ist $\sigma(E^*, E)$-kompakt.*

*Beweis:* Wir bezeichnen die Menge aus der Behauptung mit $K$. Für ein $x \in E$ ist $I(x) := \{z \in \mathbb{K} : |z| \le c(x)\}$ kompakt und nicht leer.

Nach dem Satz von TYCHONOFF ist auch $I := \prod_{x \in E} I(x)$ *kompakt* $\Big(\subset \prod_E \mathbb{K}\Big)$.

In (24.9) betrachten wir $E^*$ an Stelle von $E$ und fassen $\Gamma := E$ als (totale) Teilmenge von $E^{**}$ auf; also $\mathfrak{S} = \prod_E \mathbb{K}$ (mit Produkttopologie).

Nach (24.9) ist $\tau_{/}: \big(K, \sigma(E^*, E)_K\big) \longrightarrow \big(\tau K, \mathbb{P}_{\tau K}\big)$ topologisch. Wir zeigen: $\tau K$ *ist abgeschlossen in* $I$ $\big($dann ist $\tau K$ kompakt, also $K$ $\sigma(E^*, E)$-kompakt$\big)$: Für $z \in E$ ist die Projektion $I \ni \varphi \longmapsto \varphi(z) \in I(z)$ stetig; daher sind für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in E$

$$\begin{aligned} A(x,y) &:= \big\{\varphi \in I : \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)\big\} \\ \text{und} \quad B(\alpha, x) &:= \big\{\varphi \in I : \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)\big\} \end{aligned}$$

abgeschlossen. Damit ist auch $\tau K = \bigcap_{x,y \in E} A(x,y) \cap \bigcap_{\alpha \in \mathbb{K},\, x \in E} B(\alpha, x)$ abgeschlossen. □

### 24.11 Satz von ALAOGLU

*Vor.: $E$ $\mathbb{K}$-NVR*

*Beh.: $\big\{x' \in E' : \|x'\| \le 1\big\}$ ist $\sigma(E', E)$-kompakt.*

*In Worten:* Der Einheitskreis im Dualraum ist schwach $*$-kompakt.

*Beweis:* In (24.10) wählen wir $c := \|\ \|$; unter Beachtung von

$$\big\{x' \in E' : \|x'\| \le 1\big\} = \big\{f \in E^* : \forall x \in E \quad |fx| \le \|x\|\big\};$$

ist nach (24.10) die *ℓ. S.* $\sigma(E^*, E)$-kompakt. $\sigma(E', E) \overset{\checkmark}{=} \sigma(E^*, E)_{E'}$ liefert die Behauptung. □

Der Satz hat ein breites Spektrum von Anwendungen: So etwa in der Theorie der BANACH-Algebren und der Spektraltheorie hermitescher und unitärer Operatoren. In der Statistik wird er beispielsweise herangezogen für den Nachweis der Existenz eines optimalen $\alpha$-Niveau-Tests für Testprobleme mit zusammengesetzter Hypothese und einfacher Alternative.

### 24.12 Folgerung

*Vor.: $E$ reflexiver $\mathbb{K}$-BR*

*Beh.: $\big\{x \in E : \|x\| \le 1\big\}$ ist schwach-kompakt.*

Die Umkehrung zu (24.12) gilt auch: ohne Beweis

---

Es seien wieder $E$ ein $\mathbb{K}$-VR und $\Gamma \subset E^*$.

**Bezeichnung** Für $M \subset E$: $M$ *„$\sigma(\Gamma)$-beschränkt"* $:\Longleftrightarrow \forall \varphi \in \Gamma \ \varphi M$ beschränkt

$\big(\overset{(\ldots)}{\Longleftrightarrow} \forall U \in \mathbb{U}_0^{\sigma(\Gamma)} \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad M \subset \lambda U\big)$

**24.13**

*a) $E$ $\mathbb{K}$-NVR und $M \subset E$ : $M$ beschränkt $\Longleftrightarrow$ $M$ schwach-beschränkt*

*b) $E$ $\mathbb{K}$-BR, $M \subset E'$: $M$ beschränkt $\Longleftrightarrow$ $M$ schwach$*$-beschränkt*

*Beweis:* „$\Longrightarrow$" (in a) und b)): ✓ a), „$\Longleftarrow$": (22.3) b), „$\Longleftarrow$": (22.2) □

### 24.14 Folgerung

*Vor.:* $E$ $\mathbb{K}$-BR, $M \subset E'$

*Beh.:* $M$ schwach$*$-kompakt $\Longleftrightarrow$ $M$ beschränkt $\wedge$ $M$ schwach$*$-abgeschlossen

*Beweis:*
„$\Longrightarrow$": $M$ ist schwach$*$-abgeschlossen, da $\big($nach (24.2) und (24.5)$\big)$ $\big(E', \sigma(E', E)\big)$ ein HdR ist. Für $x \in E$ ist $\varkappa x\colon \big(E', \sigma(E', E)\big) \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig, also $\varkappa x M$ kompakt und somit beschränkt; nach (24.13.b) daher: $M$ beschränkt

„$\Longleftarrow$": Es existiert $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\|\frac{1}{n}M\| \leq 1$ $\big($mit $M$ ist auch $\frac{1}{n}M$ $\sigma(E', E)$-abgeschlossen$\big)$; mit (24.11): $\frac{1}{n}M$ (also auch $M$) $\sigma(E', E)$-kompakt □

Wir haben uns in diesem Abschnitt auf wenige exemplarische Überlegungen zu schwachen Topologien beschränkt. Dabei haben wir — aus didaktischen Gründen — (wie im gesamten funktionalanalytischen Teil) nur NVRe zugrundegelegt. Neben vielen wichtigen Anwendungen, in denen *‚topologische VRe'* auftreten, die nicht (halb-)normierbar sind, sind auch die schwachen Topologien [und die Aussagen zu Produkträumen: (19.4)] ein starkes Argument für die Beschäftigung mit allgemeinen (zumindest lokal-konvexen!) topologischen VRn!

# 25 Hilberträume

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $H$ ein $\mathbb{K}$-VR.

**Bezeichnung** $\langle\ ,\ \rangle\colon \begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \cup & & \cup \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle \end{array}$ heißt *„Semi-Skalarprodukt"* (auf $H$) genau dann, wenn $\big($für alle $x, y, z \in H$:$\big)$

$\langle\,\cdot\,, z\rangle$ linear $\big($also $\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ $(\ldots)\big)$

$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ und

$\langle x, x\rangle \in [0, \infty[$ gelten.

Ein Semi-Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ heißt *„Skalarprodukt"* genau dann, wenn statt der letzten Eigenschaft sogar $\langle x, x\rangle \in\, ]0, \infty[$ für $x \neq 0$ gilt.

Im Folgenden sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein *Semi-Skalarprodukt* auf $H$.

**25.0 Trivialität** $\langle z, \alpha x + y\rangle = \overline{\alpha}\langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle$ $(\ldots)$

**Bezeichnung** $H \ni x, y$ *„orthogonal"* $: \iff x \perp y : \iff \langle x, y \rangle = 0$,

$\|z\| := \langle z, z \rangle^{1/2} \quad (z \in H)$,

für eine nicht-leere Menge $I$ und $x_i \in H$ für $i \in I$:

$(x_i)$ *„orthonormal"* (*„Orthonormalsystem"*, *„ONS"*)

$: \iff \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in I)$

### 25.1 Bemerkung

*Vor.:* *I nicht-leere Menge;* $(x_i)_I$ *ONS;* $y \in H$*;* $I \supset J$ *endlich,* $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(i \in J)$

*Beh.:* *a)* $\left\| y - \sum_J \alpha_i x_i \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_J |\langle y, x_i \rangle|^2 + \sum_J \left| \alpha_i - \langle y, x_i \rangle \right|^2$

*b)* $\ell.\,S.$ *(strikt) minimal* $\iff \alpha_i = \langle y, x_i \rangle \quad (i \in J)$

*c)* $\left\| y - \sum_J \langle y, x_i \rangle x_i \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_J \left| \langle y, x_i \rangle \right|^2$

*d)* $\left\| \sum_J \alpha_i x_i \right\|^2 = \sum_J |\alpha_i|^2$

*Beweis:* a) $\overset{\checkmark}{\Longrightarrow}$ b), c), d)

a) $\ell.\,S. = \|y\|^2 - \sum_J \alpha_i \langle x_i, y \rangle - \sum_J \overline{\alpha_i} \langle y, x_i \rangle + \sum_J |\alpha_i|^2 \overset{\checkmark}{=} r.\,S.$ □

### 25.2 Folgerung

*Vor.:* *I nicht-leere Menge;* $(x_i)_I$ *ONS;* $y \in H$

*Beh.:* *a)* $\sum_I |\langle y, x_i \rangle|^2 \leq \|y\|^2$ (Bessel-**Ungleichung**)

*b)* $\{ i \in I : \langle y, x_i \rangle \neq 0 \}$ *ist abzählbar.*

Dabei ist $\sum_I \alpha_i := \sup \left\{ \sum_J \alpha_i : I \supset J \text{ endlich} \right\}$ für $\alpha_i \in [0, \infty[$ gesetzt.

*Beweis:* a): nach (25.1.c)

b): nach a) ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\left\{ i \in I : |\langle y, x_i \rangle| \geq \frac{1}{n} \right\}$ endlich

($\Longrightarrow$ Behauptung) □

### 25.3 Bemerkung

*Für $x, y \in H$:*

*a)* $\big|\langle x,y\rangle\big| \leq \|x\|\,\|y\|$ (SCHWARZ**-Ungleichung**)

*b)* $\|\ \| : H \longrightarrow [0,\infty[$ *ist eine Halbnorm.*

*b')* $\|\ \|$ *ist genau dann eine Norm, wenn* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt ist.*

*c)* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2+\|y\|^2\big)$ (**„Parallelogramm-Gleichung"**)

*d)* $4\cdot\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$, *falls* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$4\cdot\langle x,y\rangle = \sum\limits_{n=0}^{3} i^n\,\|x+i^n y\|^2$, *falls* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ (**„Polarisierungsformeln"**)

*Beweis:*

a): Falls $\|x\| = \|y\| = 0$: Mit $\alpha := \langle x,y\rangle$:

$$0 \leq \|x-\alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\alpha}\,\langle x,y\rangle - \alpha\,\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\,\|y\|^2 = -2|\langle x,y\rangle|^2$$

Sonst: Œ $\|x\| > 0$; in (25.2 a) $I := \{1\}$ und $x_1 := \frac{1}{\|x\|}x$ betrachten

b): $\|x\| \geq 0$ und $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ für $\alpha\in\mathbb{K}$: ✓

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle \overset{\checkmark}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \overset{a)}{\leq} \big(\|x\|+\|y\|\big)^2$$

b'): ✓

c): □□□

d): Übung (11.1.a) *Ü stellen!*

*Ist* $\big(X,\|\ \|\big)$ *ein komplexer NVR, der die Parallelogramm-Gleichung erfüllt, so wird durch die (zweite) Polarisierungsformel ein Skalarprodukt* $\langle\ ,\ \rangle$ *definiert, dessen induzierte Norm gerade* $\|\ \|$ *ist.* Übung (11.1.b) *Ü stellen!*

### 25.4 Bemerkung $\langle\ ,\ \rangle : H\times H \longrightarrow \mathbb{K}$ *ist stetig.*

*Beweis:* Aus (25.3 a) oder aus (25.3 d) $\big($mit der Stetigkeit von $\|\ \|\big)$ ablesen. □

**Bezeichnung**

$\big(H,\langle\ ,\ \rangle\big)$ *„Prä-*HILBERT*raum"* $:\Longleftrightarrow$ $H$ $\mathbb{K}$-VR und $\langle\ ,\ \rangle$ Skalarprodukt auf $H$

$\big(H,\langle\ ,\ \rangle\big)$ *„*HILBERT*raum" („(H)-Raum", „HR")* $:\Longleftrightarrow$
$\big(H,\langle\ ,\ \rangle\big)$ Prä-HILBERTraum und $\big(H,\langle\ ,\ \rangle\big)$ vollständig (also BR).*

* d. h. $(H,\|\ \|)$ ist vollständig (mit der zu $\langle\ ,\ \rangle$ gebildeten Norm $\|\ \|$) .

**Beispiele**

(B1) $n \in \mathbb{N}$; für $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\langle x, y\rangle := \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \overline{y_\nu}$$

*Speziell für* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $n = 3$ also das ‚übliche' Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$.

(B2) $-\infty < a < b < \infty$; für $f, g \in \mathrm{C}^{\mathbb{K}}[a, b]$ :

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

(B3) Für $x, y \in \ell_2$ :
$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

In (B1), (B3) hat man HRe; (B2) ist ein Beispiel für einen Prä-HR, der nicht HR ist. Würde man in (B2) statt $\mathrm{C}^{\mathbb{K}}[a, b]$ die Menge der ($\mathbb{K}$-wertigen) RIEMANN-integrierbaren Funktionen zugrundelegen, so erhielte man ein Semi-Skalarprodukt, das nicht Skalarprodukt ist.

## 25.5 Vervollständigung

*Ein Prä-HILBERTraum $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ läßt sich (z. B. nach (21.2)) als $\mathbb{K}$-NVR vervollständigen; die Vervollständigung ist dann in natürlicher Weise ($\langle\ ,\ \rangle$ stetig fortsetzen!) HILBERTraum.*

**Bezeichnung** Unter der Voraussetzung

$$\big(E, \|\ \|\big)\ \mathbb{K}\text{-NVR},\quad \emptyset \neq U \subset E,\quad f \in E$$

heißt ein $g \in U$ mit

$$\|f - g\| = d(f, U)$$

*„Proximum"*, *„Minimallösung"* oder *„Element bester Approximation"* zu $f$ bezüglich $U$.

Die allgemeine Fragestellung wird in der *Approximationstheorie* untersucht; im HR-Fall erhält man recht einfach dazu den

## 25.6 Satz

*Vor.:* $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ *HR;* $H \supset F$ *abgeschlossen, konvex,* $\neq \emptyset$

*Beh.:* $\forall\, x \in H \quad \dot{\exists}\, y_x \in F \quad \|x - y_x\| = d(x, F)$

**Anmerkung** Weder die Voraussetzung der Abgeschlossenheit noch die der Konvexität von $F$ lassen sich ersatzlos streichen: □□□

Wir zeigen zum Beweis zunächst einen kleinen **Hilfssatz**

> *Vor.:* $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ *Prä-*HILBERT*raum;* $H \supset F \neq \emptyset$ *'mittelpunktkonvex',*
> *d. h.* $x, y \in F \implies \frac{1}{2}(x+y) \in F$
> $x \in H$, $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ *mit* $\|x - y_n\| \longrightarrow d(x, F)$
>
> *Beh.:* $(y_n)$ *ist eine CF.*

*Beweis:* Für $v, w \in F$ hat man nach der Parallelogramm-Gleichung

$$2\big(\|v-x\|^2 + \|x-w\|^2\big) \;=\; \|v-w\|^2 + \|v+w-2x\|^2,$$

also
$$\|v-w\|^2 \;=\; \ell.S. \;-\; 4\,\Big\|\underbrace{\frac{1}{2}(v+w)}_{\in F} - x\Big\|^2 \;\leq\; \ell.S. \;-\; 4d^2 \qquad ①$$

mit $d := d(x, F)$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt somit

$$\|y_n - y_m\|^2 \;\leq 2\big(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2\big) \;-\; 4d^2 \longrightarrow 0 \qquad (n, m \longrightarrow \infty). \qquad \square$$

*Beweis des Satzes:* Zu einem festen $x \in H$ existiert eine Folge $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ so, daß $\|x - y_n\| \longrightarrow d := d(x, F)$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt. Nach dem Hilfssatz ist $(y_n)$ eine CF in $F$, die einen Grenzwert $y \in F$ hat ($H$ ist ein HR, $F$ ist abgeschlossen). Die Stetigkeit der Norm liefert $d = \|x - y\|$. Die Eindeutigkeit liest man aus ① ab. □

**Bezeichnung** Für $A, B \subset H$ und $x, y \in H$:

$A \perp B \;:\iff\; A, B$ *„orthogonal"* $:\iff\; \forall\, a \in A \quad \forall\, b \in B \quad a \perp b\,,$

$A \perp y :\iff\; A \perp \{y\}\,,$

$x \perp B :\iff\; \{x\} \perp B\,,$

$A^{\perp} \;:=\; \big\{z \in H : z \perp A\big\}$ *„Orthogonalraum zu A"*

### 25.7 Satz

> *Vor.:* $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ *Prä-HR,* $U$ *Unterraum von* $H$*,* $f \in H$*;* $\widehat{g} \in U$
>
> *Beh.:* $\widehat{g}$ *Proximum zu* $f$ *bezüglich* $U \iff f - \widehat{g} \perp U$

*Beweis:*

„$\Longleftarrow$": Für $g \in U$: $\|f - g\|^2 \;=\; \|f - \widehat{g} + \underbrace{(\widehat{g} - g)}_{\in U}\|^2 \;=\; \|f - \widehat{g}\|^2 + \|\widehat{g} - g\|^2$

„$\Longrightarrow$": *Sonst* existiert ein $g \in U$ so, daß $\langle f - \widehat{g}, g\rangle =: \alpha \neq 0$; für $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\big\|f - \underbrace{(\widehat{g} - \lambda g)}_{\in U}\big\|^2 = \big\|(f - \widehat{g}) + \lambda g\big\|^2$$
$$= \|f - \widehat{g}\|^2 + 2\,\mathfrak{Re}\,\lambda\langle g, f - \widehat{g}\rangle + |\lambda|^2\,\|g\|^2$$

Für $\lambda := -\dfrac{\alpha}{\|g\|^2}$: $\ell.S. = \|f - \widehat{g}\|^2 - \dfrac{|\alpha|^2}{\|g\|^2}$ $\lightning$ □

**25.8 Bemerkung**

*Vor.:* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *Prä-*HILBERT*raum (also* $\langle\ ,\ \rangle$ *Skalarprodukt);* $A, B \subset H$

*Beh.:* *a)* $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$; $\{0\}^\perp = H$, $H^\perp = \{0\}$

*b)* $A \cap A^\perp \subset \{0\}$

*c)* $A \subset (A^\perp)^\perp =: A^{\perp\perp}$ $\quad (A \perp A^\perp)$

*d)* $A^\perp$ *ist ein abgeschlossener UR von* $H$.

*e)* $A^\perp = \langle A\rangle^\perp = \left(\overline{\langle A\rangle}\right)^\perp$

*Beweis:* a), b) c): ✓

d): $A^\perp = \bigcap\limits_{y \in A} \mathrm{Kern}\langle\,\cdot\,, y\rangle$ $\big($und $\langle\,\cdot\,, y\rangle \in H'$ für $y \in H$ (nach (25.3.a))$\big)$

e): nach a) ist jeweils „$\supset$" gegeben. $A^\perp \subset \langle A\rangle^\perp$: ✓
Zu $y \in \overline{\langle A\rangle}$ existiert eine Folge $(y_n) \in \langle A\rangle^{\mathbb{N}}$ mit $y_n \longrightarrow y$; für $x \in \langle A\rangle^\perp$ gilt damit $0 = \langle x, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$, also $x \perp y$. □

Im Folgenden sei $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ ein HILBERT*raum*.

**25.9 Bemerkung**

*Vor.:* $M$ *abgeschlossener Unterraum** *von* $H$

*Beh.:* $H = M + M^\perp$, $M \cap M^\perp = \{0\}$, $M^\perp$ *ist ein abgeschlossener Unterraum von* $H$.

*Beweis:* Nach (25.8) nur noch *zu zeigen:* $H \subset M + M^\perp$.
Zu $x \in H$ existiert nach (25.6) das Proximum $y_x$ bezüglich $M$. Nach (25.7) gilt $x - y_x \in M^\perp$; $x = y_x + (x - y_x)$ ist die gewünschte Darstellung. □

**25.10 Bemerkung** *Für* $M \subset H$ *gilt:* $\overline{\langle M\rangle} = M^{\perp\perp}$

* unter diesen Voraussetzungen nennt man $M^\perp$ auch *„orthogonales Komplement"*.

*Beweis:* $$\overline{\langle M\rangle} \overset{(25.8.c)}{\subset} \overline{\langle M\rangle}^{\perp\perp} \overset{(25.8.e)}{=} M^{\perp\perp} \qquad ②$$

Daher *noch zu zeigen:* $M^{\perp\perp} \subset \overline{\langle M\rangle}$: $N := \overline{\langle M\rangle}$ ist ein abgeschlossener UR von $H$ (dazu (15.2.c) beachten). Für $x \in M^{\perp\perp}$ existieren — nach (25.9) — $x_1 \in N$, $x_2 \in N^\perp$ mit $x = x_1 + x_2$; mit ②

$$M^{\perp\perp} \ni x - x_1 \;=\; x_2 \in N^\perp \overset{(25.8.e)}{=} M^\perp,$$

also — nach (25.8 b) — $x - x_1 = 0$, d. h. $x = x_1 \in N = \overline{\langle M\rangle}$. □

**25.11 Zusatz**

*Vor.: wie in* (25.9)

*Bez.: Für $x \in H$ existieren — nach (25.9) — eindeutig*

*$x_1 =: Px \in M$, $x_2 =: Qx \in M^\perp$ mit $x = x_1 + x_2$.*

*Beh.: a) $P$ ist linear mit $P^2 = P$.*

*b) $\|P\| \le 1$, $M \ne \{0\} \Longrightarrow \|P\| = 1$*

*c) $\forall\, x, y \in H \quad \langle Px, y\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$*

*d) $\forall\, x \in H \quad \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$*

a), b) zeigen: $P$ ist ein *Projektor* (man vergleiche (23.8)).

*Beweis:* a): ✓

d): $\|x\|^2 = \langle Px + Qx, Px + Qx\rangle \overset{\checkmark}{=} r.\,S.$

b): nach d): $\|Px\| \le \|x\|$ $(x \in H)$, also $\|P\| \le 1$; für $x \in M$ gilt $\|Px\| = \|x\|$, also $\|P\| \ge 1$, falls $M \ne \{0\}$.

c): $\ell.\,S. = \langle Px, Py + Qy\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle Px + Qx, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$ □

**25.12 Anmerkung** *In* HILBERT*räumen ist (20.3) (‚*HAHN-BANACH*') ‚trivial':*

*Vor.: $M$ Teilraum von $H$, $f \in M'$*

*Beh.: Es existiert eine Fortsetzung $F \in H'$ von $f$ mit $\|F\| = \|f\|$.*

*Beweis:* Zu $f$ existiert $f_1 \in \overline{M}'$ mit $f_{1/M} = f$ (stetige Fortsetzung auf die abgeschlossene Hülle), dann $\|f\| \overset{\checkmark}{=} \|f_1\|$. Mit $P$ zu $\overline{M}$ gemäß (25.11): $F := f_1 \circ P \in H'$ erfüllt die Behauptung: ✓ □

**25.13 Satz von Riesz**

> *a) Für $y \in H$ ist $\varphi y := \langle \cdot\,, y\rangle \in H'$ mit $\|\varphi y\| = \|y\|$.*
>
> *b) $\forall\, f \in H' \ \dot{\exists}\, y \in H \ \ f = \varphi y$*

*Beweis:*

a): $|(\varphi y)x| = |\langle x, y\rangle| \overset{(25.3\text{ a})}{\leq} \|x\|\,\|y\| \implies \varphi y \in H'$ und $\|\varphi y\| \leq \|y\|$;
$|(\varphi y)y| = |\langle y, y\rangle| = \|y\|^2$ zeigt $\|\varphi y\| \geq \|y\|$.

b): Œ $f \neq 0$: Dann ist $M := \operatorname{Kern} f$ ein abgeschlossener UR von $H$ mit $M \neq H$, also $M^\perp \neq \{0\}$ $\big($nach (25.9)$\big)$. Wähle ein $a \in M^\perp$ mit $\|a\| = 1$; für beliebiges $x \in H$ und $u(x) := (f\,x)a - (f\,a)x$ $(\in H)$ hat man $f\,u(x) = 0$, also $u(x) \in M$ und somit

③ $$\langle u(x), a\rangle \ = \ 0\,.$$

Daher $$f\,x \underset{\|a\|=1}{=} f\,x\langle a, a\rangle \overset{③}{=} f\,a\langle x, a\rangle = \big\langle x, \underbrace{\overline{f\,a}\,a}_{=:y}\big\rangle\,.$$

*Eindeutigkeit:* ✓ □

**25.14 Zusatz** *Die in (25.13) definierte Abbildung $\varphi\colon H \ni y \longmapsto \langle \cdot\,, y\rangle \in H'$ ist bijektiv, normerhaltend und ‚konjugiert-linear', d. h.:*
$$\varphi(\alpha y_1 + y_2) \ = \ \overline{\alpha}\varphi y_1 + \varphi y_2 \qquad \big(\alpha \in \mathbb{K};\ y_1, y_2 \in H\big).$$

*Beweis:* ✓ □

**25.15 Folgerung** *Jeder* Hilbert*raum ist reflexiv.*

*Beweis:* Es sei $F \in H''$. *Gesucht* ist ein $x \in H$ mit $\varkappa x = F$, d. h. für alle $x' \in H'$ $x'x \ = \ F x'$; nach (25.13) ist dies äquivalent zu:

$$\forall\, y \in H \quad F(\varphi y) \ = \ (\varphi y)x \ = \ \langle x, y\rangle \ = \ \overline{\langle y, x\rangle} \ = \ \overline{(\varphi x)y}\,,$$

also weiter äquivalent zu:

$$\forall\, y \in H \quad (\varphi x)y \ = \ \overline{F(\varphi y)}\,.$$

Die Abbildung $H \ni y \longmapsto \overline{F(\varphi y)} \in \mathbb{K}$ ist (nach (25.14)) linear (und beschränkt); daher folgt die Existenz von $x$ nach (25.13.b). □

---

Im Folgenden seien noch $I$ nicht-leere Menge und $(x_i)_I$ ein *ONS*.

**Bezeichnung**

$(x_i)_I$ heißt *„vollständig“* oder *„Orthonormalbasis“ „ONB“* $\ :\Longleftrightarrow$
$(x_i)_I$ *‚maximales' ONS.*

Bei den im nächsten Satz auftretenden Reihen ist entweder (25.2.b) zu beachten ($\rightsquigarrow$ *unbedingte Konvergenz*) oder — schöner — die folgende Definition von *„Summierbarkeit“* heranzuziehen:

**Definition**

*Voraussetzung:* $\big(E, \| \ \|\big)$ $\mathbb{K}$-*NVR*, $I$ *nicht-leere Menge*, $x_i \in E$ $(i \in I)$, $x \in E$

$$\sum_I x_i = x :\iff \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, I_0\, (\textit{endlich}, \subset I)\; \forall\, J\, (\textit{endlich}, \subset I, \supset I_0)\; \Big| \sum_J x_i - x \Big| < \varepsilon$$

**25.16 Satz**

*Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) $(x_i)$ *ist eine ONB.*

b) $\forall\, y \in H \quad y = \sum_I \langle y, x_i\rangle x_i$ „FOURIER-**Entwicklung**“ *

c) $\forall\, x, y \in H \quad \langle x, y\rangle = \sum_I \langle x, x_i\rangle \langle x_i, y\rangle$

d) $\forall\, y \in H \quad \|y\|^2 = \sum_I |\langle y, x_i\rangle|^2$ „PARSEVAL-**Gleichung**“

e) $\big\langle \{x_i : i \in I\} \big\rangle$ *ist dicht in* $H$ .

**Anmerkung**

Die *Konvergenz der Reihe in* b) folgt mit

$$\Big\| \sum_J \langle y, x_i\rangle x_i \Big\|^2 \overset{(25.1.d)}{=} \sum_J |\langle y, x_i\rangle|^2$$

(für $I \supset J$ endlich) aus (25.2.a) und der Vollständigkeit von $\big(H, \| \ \|\big)$ . Die Konvergenz der Reihe in c) folgt mit der HÖLDER-Ungleichung für $\ell_2$ (und (25.2.a)). Die Reihe in b) ist unbedingt konvergent, nicht notwendig absolut konvergent. Die Reihe in c) ist absolut konvergent.

*Beweis* (von (25.16)): c) $\Longrightarrow$ d): ✓

Im Folgenden sei $J$ eine endliche Teilmenge von $I$:

b) $\Longrightarrow$ c): $\Big\langle \sum_J \langle x, x_i\rangle x_i, \sum_J \langle y, x_j\rangle x_j \Big\rangle \overset{\checkmark}{=} \sum_J \langle x, x_i\rangle \langle x_i, y\rangle$; mit der Stetigkeit von $\langle\ ,\ \rangle$ folgt die Behauptung.

d) $\Longrightarrow$ b): $\Big\| y - \sum_J \langle y, x_i\rangle x_i \Big\|^2 \overset{(25.1.c)}{=} \|y\|^2 - \sum_J |\langle y, x_i\rangle|^2$

* Die Koeffizienten $\langle y, x_i\rangle$ heißen „FOURIER-*Koeffizienten*“ (zu ...).

a) $\Longrightarrow$ b): Für $x := y - \sum_I \langle y, x_i \rangle x_i$ (Anmerkung beachten!) hat man $\big($mit der Stetigkeit von $\langle\ ,\ \rangle\big)$: $\langle x, x_j \rangle = 0$ für alle $j \in I$ und somit — da $(x_i)$ *maximales* ONS ist — $x = 0$.

b) $\Longrightarrow$ e): ✓

e) $\Longrightarrow$ a): $x \in \{x_i : i \in I\}^\perp \overset{(25.8\text{ e})}{=} \left(\overline{\langle \{x_i : i \in I\} \rangle}\right)^\perp \overset{\text{Vor.}}{=} H^\perp = \{0\}$: $\quad x = 0$ $\square$