Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Markus Sigg
29.4.2003

0. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den nächsten Übungstunden vorzubereiten.

(0. 1) Zeigen Sie, daß die folgenden Abbildungen Metriken sind, und beschreiben Sie die von ihnen induzierten Topologien:

(a) X sei eine nicht-leere Menge und $\delta\colon X^2 \to [0,\infty[$ definiert durch

$$\delta(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

für $x, y \in X$. (δ heißt *Diskrete Metrik.*)

(b) p sei eine Primzahl und $\delta_p\colon \mathbb{Z}^2 \to [0,\infty[$ definiert durch

$$\delta_p(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ p^{-k} & \text{falls } x \neq y, \text{ dabei } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } p^k \mid x-y \text{ und } p^{k+1} \nmid x-y \end{cases}$$

für $x, y \in \mathbb{Z}$. (δ_p heißt *p-adische Metrik.*)

(c) M sei eine nicht-leere Menge, X die Menge aller M-wertigen Folgen und $\delta\colon X^2 \to [0,\infty[$ definiert durch

$$\delta(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ \frac{1}{n} & \text{falls } x \neq y, \text{ dabei } n \in \mathbb{N} \text{ minimal mit } x_n \neq y_n \end{cases}$$

für $x = (x_n) \in X$ und $y = (y_n) \in X$.

(0. 2) (X, δ) sei ein semimetrischer Raum. Für $x, y \in X$ definieren wir:

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \delta(x,y) = 0$$

Zeigen Sie:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

(b) $\overline{\delta}(\overline{x}, \overline{y}) := \delta(x,y)$ für $x \in \overline{x} \in X_{/\sim}$ und $y \in \overline{y} \in X_{/\sim}$ definiert eine Metrik $\overline{\delta}$ auf $X_{/\sim}$.

(0. 3) Für zwei Metriken δ_1, δ_2 auf einer nicht-leeren Menge X definieren wir

$$\delta_1 \ll \delta_2 \;:\Longleftrightarrow\; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in X \; (\delta_2(x,y) < \delta \Rightarrow \delta_1(x,y) < \epsilon)$$

und nennen δ_1 und δ_2 genau dann *gleichmäßig äquivalent*, wenn $\delta_1 \ll \delta_2$ und $\delta_2 \ll \delta_1$ gelten.

(a) Zeigen Sie: $\quad \delta_1 \ll \delta_2 \implies \mathbb{O}(\delta_1) \subset \mathbb{O}(\delta_2)$

(b) Gleichmäßig äquivalente Metriken erzeugen also die gleiche Topologie. Zeigen Sie, daß die Umkehrung nicht gilt.

(c) Zeigen Sie: Ist d_1 eine Metrik auf X, dann wird durch $d_2(x,y) := \min\{1, d_1(x,y)\}$ für $x, y \in X$ eine zu d_1 gleichmäßig äquivalente Metrik d_2 auf X definiert.