Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Markus Sigg
6.5.2003

1. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden am 14.5.2003 vorzubereiten und, soweit schriftlich bearbeitet, bis zum 12.5.2003 um 10:00 Uhr in die jeweiligen Gruppenbriefkästen einzuwerfen.

(1.1) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$ und $N_p \colon \mathbb{K}^n \to [0,\infty[$ definiert durch $N_p(x) := \sum_{i=1}^n |\xi_i|^p$ für $x = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{K}^n$.

(a) Zeigen Sie $N_p(x+y) \le N_p(x) + N_p(y)$ für alle $x,y \in \mathbb{K}^n$. Ist N_p eine Norm?

(b) Es sei $\|x\|_p := N_p(x)^{1/p}$ für $x \in \mathbb{K}^n$. Ist $\|\ \|_p : \mathbb{K}^n \to [0,\infty[$ eine Norm?

(c) Zeigen Sie, daß $d_p(x,y) := N_p(x-y)$ eine Metrik auf $\mathbb{K}^n$ ergibt.

(d) Zeigen Sie, daß für alle $x, x_k \in \mathbb{K}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ gilt: $\|x - x_k\|_p \to 0 \iff d_p(x,x_k) \to 0$.

(e) Skizzieren Sie $E_p := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p = 1\}$ für $p = \varepsilon, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{1}{\varepsilon}, \infty$ mit ‚ganz kleinem‘ $\varepsilon > 0$.

(1.2) Es seien $0 < p < 1$ und $N_p \colon \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to [0,\infty]$ definiert durch $N_p(x) := \sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^p$ für $x = (\xi_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Damit sei $\ell_p := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : N_p(x) < \infty\}$.

(a) Zeigen Sie, daß ℓ_p ein Vektorraum ist.

(b) Es sei $\|x\|_p := N_p(x)^{1/p}$ für $x \in \ell_p$. Zeigen Sie $\ell_r \subset \ell_s$ und $\|\ \|_s \le \|\ \|_r$ für $0 < r \le s \le 1$.

(c) Zeigen Sie, daß $d_p(x,y) := N_p(x-y)$ eine Metrik auf ℓ_p ergibt.

(d) Zeigen Sie, daß für alle $x, x_k \in \ell_p$ $(k \in \mathbb{N})$ gilt: $\|x - x_k\|_p \to 0 \iff d_p(x,x_k) \to 0$.

(1.3) Es seien $0 < p,q,r \le \infty$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Zeigen Sie, daß $xy \in \ell_r$ und $\|xy\|_r \le \|x\|_p \|y\|_q$ gilt für alle $x \in \ell_p$ und $y \in \ell_q$.

(1.4) Zeigen Sie, daß die Inklusion $\ell_r \subset \ell_s$ für $0 < r < s \le \infty$ echt ist.

(1.5) In der Vorlesung wurde gezeigt, wie man aus einer Topologie $\mathbb{O}$ eine Familie $\mathbb{U}(\mathbb{O})$ von Umgebungssystemen $\mathbb{U}_x$ der Punkte x des zugehörigen Raums erhält, für die (U0)–(U4) aus Satz 1.5 gelten. Für semimetrische Räume wurde gezeigt, wie man umgekehrt von den ε-Umgebungen zu einer Topologie kommt. Das letztere läßt sich noch abstrahieren. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathfrak{R}$ eine nicht-leere Menge, und hat man zu jedem $x \in \mathfrak{R}$ eine Menge $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{P}(\mathfrak{R})$ mit (U0)–(U4), dann ist $\mathbb{O}(\mathbb{U}) := \{O \subset \mathfrak{R} : \forall x \in O \ \ O \in \mathbb{U}_x\}$ eine Topologie auf $\mathfrak{R}$.

(b) Ist $\mathfrak{R}$ ein semimetrischer Raum, und setzt man $\mathbb{U}_x := \{U \subset \mathfrak{R} : \exists\ \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(x) \subset U\}$ für $x \in \mathfrak{R}$, dann erfüllen diese $\mathbb{U}_x$ die Forderungen (U0)–(U4).

(c) Es gilt $\mathbb{O}(\mathbb{U}(\mathbb{O})) = \mathbb{O}$ für jede Topologie $\mathbb{O}$.

(d) Es gilt $\mathbb{U}(\mathbb{O}(\mathbb{U})) = \mathbb{U}$ für jede Familie $\mathbb{U}$ von Umgebungssystemen mit (U0)–(U4).

Drei Anmerkungen: 1. Es ist *nicht* Pflicht, *alle* Aufgaben zu bearbeiten. 2. Auch wer Aufgaben nicht schriftlich abgibt, darf gerne vortragen. 3. Es ist willkommen, wenn Lösungen / Lösungsversuche schon freitags abgegeben werden, damit mehr Zeit zum Durchsehen bleibt.