Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Markus Sigg
8.7.2003

10. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden am 16.7.2003 vorzubereiten und, soweit schriftlich bearbeitet, bis zum 14.7.2003 um 15:00 Uhr in die jeweiligen Gruppenbriefkästen einzuwerfen.

(10. 1) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $E := \{x \in \ell_\infty : \exists K \in \mathbb{N} \;\; \forall k \geq K \;\; x_k = 0\}$ sei mit der Norm $\| \;\|_\infty$ versehen. Zeigen Sie, daß für $n \in \mathbb{N}$ durch $T_n x := \sum_{k=1}^{n} k x_k$ für $x \in E$ Abbildungen $T_n \in E'$ erklärt werden, für die $\{T_n x : n \in \mathbb{N}\}$ für alle $x \in E$ beschränkt ist, aber $\|T_n\| \geq n$ gilt, also $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt ist. Laut UBP (Satz 22.1 bzw. Folgerung 22.2) kann $(E, \| \;\|_\infty)$ kein Banachraum sein. Zeigen Sie dies auch ohne Benutzung des UBP.

(10. 2) Zeigen Sie, daß $\mathrm{id}\colon (C[0,1], \| \;\|_\infty) \longrightarrow (C[0,1], \| \;\|_1)$ bijektiv, linear und stetig, aber nicht offen ist. Da $(C[0,1], \| \;\|_\infty)$ ein Banachraum ist, kann laut OMP (Satz 23.1) $(C[0,1], \| \;\|_1)$ kein Banachraum sein, was ohne Benutzung des OMP auch schon in (B4) auf Seite 25 der Vorlesung gezeigt wurde.

(10. 3) Gleichheit von normierten Vektorräumen ist im folgenden im Sinn von Normisomorphie zu verstehen, Teilmengenbeziehungen als isometrische Einbettung. Überlegen Sie zunächst allgemein, wie man eine Zahlenfolge als ein Funktional auf einen Raum von Zahlenfolgen wirken lassen kann. Zeigen Sie dann:

(a) $c_0' = \ell_1$

(b) $\ell_p' = \ell_q$ für $1 \leq p < \infty$ und $1 < q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(c) $\ell_\infty' \supsetneq \ell_1$

(d) Aus der Separabilität eines NVRs E folgt i. a. *nicht* die Separabilität von E'.

(10. 4) Es sei E ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Ist E reflexiv, so ist auch E' reflexiv.

(b) Ist E reflexiv, so ist auch jeder abgeschlossene Unterraum M von E reflexiv.

(c) Ist E ein Banachraum und E' reflexiv, so ist auch E reflexiv.

(d) c_0, ℓ_1 und ℓ_∞ sind nicht reflexiv.

(10. 5) Es sei E ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, daß die Einheitskugel K_0^1 genau dann kompakt ist, wenn E endlich-dimensional ist. [1]

[1] Tip: Geht ganz einfach. Die ‚Zutaten' sind alle schon bekannt.