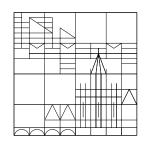
Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik Dieter Hoffmann Markus Sigg 13.5.2003



## 2. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden am 21.5.2003 vorzubereiten und, soweit schriftlich bearbeitet, bis zum 19.5.2003 um 10:00 Uhr in die jeweiligen Gruppenbriefkästen einzuwerfen.

(2.1) Bestimmen Sie  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\overline{A}$ ,  $\dot{A}$  und  $\partial A$  für die folgenden Teilmengen A von  $\mathbb{R}^2$ :

$$\{\pi\} \times \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$
 ,  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  ,  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in ]0, 1]\}$ 

- (2.2) Zeigen Sie: In jedem SMR  $(\mathfrak{R}, \delta)$  gilt  $\overline{U_a^{\varepsilon}} \subset K_a^{\varepsilon}$  für alle  $a \in \mathfrak{R}$  und  $\varepsilon > 0$ . Gilt i. a. auch "="?
- (2.3) X sei eine nicht-leere Menge und  $\mathfrak{F}(X)$  die Menge der  $\mathbb{K}$ -wertigen Abbildungen auf X. Für  $0 \neq B \subset X$ ,  $f \in \mathfrak{F}(X)$  und  $\varepsilon > 0$  sei

$$U_f^{B,\varepsilon} := \left\{ g \in \mathfrak{F}(X) : \sup_{x \in B} |f(x) - g(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für  $\emptyset \neq B \subset X$  definiert

$$d_B(f,g) := \min(1, \sup_{x \in B} |f(x) - g(x)|) \quad (f,g \in \mathfrak{F}(X))$$

eine Semimetrik  $d_B$  auf  $\mathfrak{F}(X)$ . Für alle  $\varepsilon \in ]0,1[$  und  $f,g \in \mathfrak{F}(X)$  gilt

$$g \in U_f^{B,\varepsilon} \iff d_B(f,g) < \varepsilon.$$

(b) Ist  $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}(X)$  mit  $\bigcup_{B \in \mathbb{B}} B = X$ , so wird durch

$$\mathbb{U}_f^\mathbb{B}:=\big\{\bigcap_{B\in\mathbb{B}_0}U_f^{B,\varepsilon}:\mathbb{B}\supset\mathbb{B}_0 \text{ endlich}, \varepsilon>0\big\}$$

eine Umgebungsbasis für  $f \in \mathfrak{F}(X)$  einer Topologie  $\mathbb{O}(\mathbb{B})$  (*Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Mengen in*  $\mathbb{B}$ ) definiert.  $\mathfrak{F}(X)$  wird damit zu einem Hausdorffraum.

(c) Für  $\mathbb{B} := \{\{x\} : x \in X\}$  bezeichnet man  $\mathbb{O}(\mathbb{B})$  als *Topologie der punktweisen Konvergenz* (warum?). Zeigen Sie, daß bei überabzählbarem X diese Topologie *nicht* durch eine Metrik erzeugt werden kann ( $\mathbb{O}(\mathbb{B})$  ist *nicht metrisierbar*). Genauer: Für

$$A := \{ f \in \mathfrak{F}(X) : f(X) \subset \{0,1\} \land f^{-1}(\{0\}) \text{ endlich} \}$$

gilt:  $0 \in A$ , aber es gibt keine Folge  $(f_n)$  in A mit  $f_n \longrightarrow 0$  in  $\mathbb{O}(\mathbb{B})$  (d. h. punktweise).

- (d) Zeigen Sie: Ist  $\mathbb{B}$  höchstens abzählbar, so ist  $\mathbb{O}(\mathbb{B})$  metrisierbar.  $\mathbb{D}(\mathbb{B})$
- (2.4)  $\Re$  sei ein Hausdorffraum und  $M \subset \Re$ . Zeigen Sie:
  - (a)  $\forall p \in \mathfrak{R} \quad (p \in \dot{M} \iff \forall U \in \mathbb{U}_p \ \#(U \cap M) = \infty)$
  - (b)  $\dot{M} \subset \dot{M}$
  - (c) Die Aussagen (a) und (b) gelten *nicht* in beliebigen topologischen Räumen.
- (2.5) (a) Zeigen Sie, daß ein topologischer Raum genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn auf ihm jede konvergente Filterbasis einen *eindeutigen* Grenzwert besitzt.
  - (b) Zeigen Sie, daß in 3.2 der Vorlegung "FB" nicht durch "Filter" ersetzt werden kann.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Diese Aufgabe ist mathematisch anspruchsvoller als die anderen.